I Première partie

I.A - Les polynômes P_n.

I.A.1) $\operatorname{ch} n\alpha = \dfrac{e^{n\alpha} + e^{-n\alpha}}{2} = \dfrac{(\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha)^n + (\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{sh}\alpha)^n}{2}$

$$= \frac{\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \operatorname{ch}^{n-p}\alpha \operatorname{sh}^p\alpha + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-1)^p \operatorname{ch}^{n-p}\alpha \operatorname{sh}^p\alpha}{2} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{1 + (-1)^n}{2} \operatorname{ch}^{n-p}\alpha \operatorname{sh}^p\alpha$$

$$= \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{p} \operatorname{ch}^{n-p}\alpha \operatorname{sh}^p\alpha = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} \operatorname{ch}^{n-2k}\alpha \operatorname{sh}^{2k}\alpha = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} \operatorname{ch}^{n-2k}\alpha \left(\operatorname{ch}^2\alpha - 1\right)^k$$

I.A.2) $\operatorname{ch} n\alpha$ est donc clairement un polynôme P_n en $\operatorname{ch}\alpha$.

On trouve facilement :

$P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = 2X^2 - 1$, $P_3(X) = 4X^3 - 3X$, $P_4(X) = 8X^4 - 10X^2 + 1$

en applicant la formule précédente, à savoir : $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} X^{n-2k} \left(X^2 - 1\right)^k$

I.B - Propriétés des polynômes P_n

I.B.1) Pour montrer l'égalité de ces polynômes, il suffit de la montrer pour une infinité de valeurs, ici les $\operatorname{ch}\alpha$ (en fait, $n+1$ valeurs suffisent).

$$2\operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}(n-1)\alpha = \frac{(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\left(e^{(n-1)\alpha} + e^{-(n-1)\alpha}\right)}{2} = \frac{e^{n\alpha} + e^{-n\alpha} + e^{(n-2)\alpha} + e^{-(n-2)\alpha}}{2}$$

$= \operatorname{ch} n\alpha + \operatorname{ch}(n-2)\alpha$

Et donc : $P_n(X) + P_{n-2}(X) = 2X\,P_{n-1}(X)$ pour $n \geqslant 2$.

I.B.2) On a : $P_0(\cos\alpha) = 1 = \cos 0\alpha$ et $P_1(\cos\alpha) = \cos\alpha = \cos 1\alpha$.

Par ailleurs, $\cos n\alpha + \cos(n-2)\alpha = 2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha$ par formule usuelle de trigonométrie élémentaire.

On a les mêmes conditions initiales, la même relation de récurrence, la suite P_n convient donc aussi pour les « cosinus ».

I.B.3) On montre par récurrence que le terme le plus haut degré de P_n est $2^{n-1}X^n$.

On le vérifie facilement sur P_0 et P_1.

On l'admet jusqu'au rang $n-1$ et la relation $P_n = 2X\,P_{n-1} - P_{n-2}$ le montre immédiatement au rang n, car le terme de plus au degré de P_n est celui de $2X\,P_{n-1}$.

I.B.4) Si $|x| > 1$, alors, il existe $\alpha \neq 0$ tel que : $x = \operatorname{ch}\alpha$. Alors, $P_n(x) = \operatorname{ch} n\alpha > 1$.

On a donc bien alors : $|P_n(x)| > 1$.

I.C - On va chercher les racines réelles de P_n qui sont nécessairement dans $[-1, 1]$. On cherche donc ces racines sous la forme $x = \cos\alpha$.

Alors, cela revient à résoudre $\cos n\alpha = 0$, qui revient à : $\alpha = \dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Enfin : $x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Cette fonction est $2n$ périodique en k, et donc $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ suffit. La stricte décroissance du cosinus sur $[0, \pi]$ assure que toutes ces racines sont distinctes.

On a donc n racines réelles distinctes de P_n sur $[-1, 1]$, qui sont, ici, placées dans l'ordre décroissant comme on nous le demande : $x_k = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}\right)$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Comme P_n est de degré n, et comme on a n racines distinctes, il n'y en a pas d'autre.

II Deuxième partie

II.A - Un produit scalaire

II.A.1) On a l'intégrale d'une fonction continue donc localement intégrable sur $]-1,1[$.

On a un problème de convergence de l'intégrale en -1 et en 1.

Par ailleurs, f est continue sur un segment, donc bornée par A. Ce qui donne : $\left|\dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leqslant \dfrac{A}{\sqrt{1-t^2}}$

Or $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge car une primitive de cette fonction est arcsin qui a une limite finie en 1 et en -1.

Par linéarité des intégrales convergentes, comparaison et convergence absolue, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge.

II.A.2) Remarquons d'abord que Φ est bien une application car le produit d'applications de E est une application de E, ce qui entraine la convergence de l'intégrale considérée.

Cette forme est bien lnéaire par rapport à la première variable par linéarité des intégrales convergentes et symétrique par commutativité du produit des réels. C'est une forme bilinéaire symétrique.

La forme quadratique associée est bien positive par positivité de l'intégrale, les bornes sont bien dans le bon sens.

Il ne reste à montrer que le caractère défini positif.

$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 0$ entraine : $\forall t \in [-1,1],\ \dfrac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0$ car $t \mapsto \dfrac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue, positive et d'intégrale nulle.

Ceci implique que $\forall t \in [-1,1],\ f(t) = 0$ et enfin $f = 0$ car f n'est définie que sur $[-1,1]$.

La forme quadratique est bien définie positive.

On a bien défini un produit scalaire sur E.

II.B - On prend $n \geqslant 2$

On va faire une intégration par parties dans une intégrale généralisée. On ne rappelera pas que, quand le crochet a une limite finie, alors les intégrales sont de même nature, et si elles convergent, alors on a l'égalité habituelle en remplaçant, dans le crochet, les valeurs aux points par les limites aux points.

On part ici d'une intégrale convergente.

On pose $u' = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, c'est à dire $u = -\sqrt{1-t^2}$ qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$.

On pose aussi $v = t^{n-1}$ et donc $v' = (n-1)t^{n-2}$. v est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$.

$u\,v = -\sqrt{1-t^2}\,t^{n-1}$ a une limite nulle, donc finie, en -1 et en 1. Le crochet est donc nul, les deux intégrales, convergentes, sont opposées.

Donc $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,(n-1)t^{n-2}\,\mathrm{d}t = (n-1)\int_{-1}^{1} \frac{\left(1-t^2\right)t^{n-2}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ quand on remplace $\sqrt{1-t^2}$ par $\dfrac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}$.

Ceci nous donne : $I_n = (n-1)\,(I_{n-2} - I_n)$ et finalement : $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.

Cette relation est aussi celle des intégrales de Wallis (un changement de variable $t = \cos u$, comme on va le voir nous ramène presque à une intégrale de Wallis.

Il nous faut I_0 et I_1 pour calculer I_{2p} et I_{2p+1}.

$I_0 = \pi$ et $I_1 = 0$ par primitive simple de u' déjà donnée.

Pour les impairs, la récurrence est immédiate : $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+1} = 0$.

Pour les pairs : $I_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \dfrac{(2p-1)(2p-3)\cdots(3)(1)}{(2p)(2p-2)\cdots(4)(2)} I_0$. Le dénominateur est $2^p\,p!$, et il faut remultiplier dénominateur et numérateur par le dénominateur pour avoir une factorielle au numérateur.

On obtient : $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\,\pi$, soit le double d'une des intégrales de Wallis.

II.C - Une famille orthogonale

II.C.1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)\,P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \cos nu\ \cos mu\,\mathrm{d}u$ qu'on obtient en posant $t = \cos u$ qui est bien monotone de classe $\mathscr{C}^1$. Les deux intégrales sont alors de même nature, et, comme elles sont convergentes, elles sont égales.

On transforme maintenant le produit en somme :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)\,P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(n+m)u + \cos(n-m)u\,\mathrm{d}u$$

Il y a ici trois cas, compte tenu que m et n sont des entiers naturels :

– $n = m = 0$: l'intégrale vaut π ;

– $n = m \neq 0$: l'intégrale vaut $\pi/2$;

– $n \neq m$: l'intégrale est nulle.

En effet, les intégrales de $\cos pu$ sur $[0, \pi]$ sont nulles si p est un entier non nul.

La famille des P_k est donc orthogonale.

II.C.2) La famille $(P_0,\ P_1, \ldots,\ P_n)$ est de degrés étagés et est donc une famille libre de $(n+1)$ polynômes, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Donc X^n est combinaison linéaire des polynômes de cette famille, comme ils sont tous orthogonaux à P_m, alors X^n est orthogonal à P_m $(n < m)$ et l'intégrale demandée est nulle.

II.D - Distance à un sous-espace

Rappelons que $\|P_0\| = \sqrt{\pi}$ et que, pour $n \geqslant 1$, $\|P_n\| = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

On note $Q_k = \dfrac{P_k}{\|P_k\|}$, cette famille est orthonormale, et p la projection orthogonale sur F_4, alors, $p(h) = \langle h, Q_0\rangle\, Q_0 + \langle h, Q_1\rangle\, Q_1 + \langle h, Q_2\rangle\, Q_2 + \langle h, Q_3\rangle\, Q_3 + \langle h, Q_4\rangle\, Q_4$.

Pour des raisons de parité, $\langle h, Q_1\rangle = \langle h, Q_3\rangle = 0$.

$$\langle h, Q_0\rangle\, Q_0 = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\pi}} Q_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} Q_0$$

$$\langle h, Q_2\rangle\, Q_2 = \int_{-1}^{1} 2t^2 - 1\,\mathrm{d}t\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Q_2 = -\frac{2}{3}\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_2$$

$$\langle h, Q_4\rangle\, Q_4 = \int_{-1}^{1} 8t^4 - 10t^2 + 1\,\mathrm{d}t\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Q_4 = -\frac{22}{15}\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_4$$

le « $\sqrt{1-t^2}$ » se simplifie à chaque fois comme avec Q_0.

Enfin, par application du théorème de Pythagore, la distance de h à F_4 est la racine carrée de $\|h\|^2 - \left\|p(h)\right\|^2$. Comme on a une famille orthonormale, $\left\|p(h)\right\|^2 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\right)^2 + \left(\dfrac{22}{15}\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\right)^2$.

Et $\|h\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = I_0 - I_2 = \frac{\pi}{2}$.

Il est facile maintenant de finir le calcul à la calculatrice.

On obtient : $\left\|p(h)\right\|^2 = \dfrac{3713468}{759375\,\pi}$ et : $\mathrm{d}(h, F_4) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3713468}{759375\,\pi}}$ ce qui fait environ $0,1$.

III Troisième partie

III.A - Première diagonalisibilité de l'endomorphisme φ

III.A.1) $\left(\sqrt{1-x^2}\,P'(x)\right)' = \sqrt{1-x^2}\,P''(x) - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,P'(x) = \dfrac{\left(1-x^2\right)P''(x) - x\,P'(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

$Q(x) = \left(1-x^2\right)P''(x) - x\,P'(x)$ répond donc à la question.

Pour montrer que φ est un endomorphisme de F_n, il faut montrer que, pour $P \in F_n$, on a bien $\varphi(P) \in F_n$, et que φ est linéaire.

La première vérification est simple, si P est de degré au plus n, alors $\left(1-x^2\right)P''(x) - x\,P'(x)$ est aussi de degré au plus n.

Enfin, la linéarité de φ repose entièrement sur la linéarité de la dérivation et est aussi élémentaire.

III.A.2) On prend $P(x) = x^k$, alors $Q(x) = -k^2x^k + k(k-1)x^{k-2}$ pour $k \geqslant 2$, qui fournit la $(k+1)^{\text{ème}}$ colonne de la matrice carrée d'ordre $(n+1)$.

On a aussi facilement $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(X) = -X$, qui fournissent les 2 premières colonnes de la matrice.

La matrice de φ dans la base canonique de F_n est donc : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & 6 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -4 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & n(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -(n-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n^2 \end{pmatrix}$

III.A.3) Cette matice est triangulaire, les valeurs propres sont sur la diagonale et sont distinctes deux à deux, donc simples, elle est donc diagonalisable.

Il en est de même pour φ.

III.B - Seconde diagonalisibilité de l'endomorphisme φ

III.B.1) Pour montrer que φ est un endomorphisme symétrique, il faut et il suffit de montrer que : $\langle P, \varphi(Q)\rangle = \langle \varphi(P), Q\rangle$ pour tous polynômes P et Q de F_n. On utilisera pour cela une intégration par parties.

$\langle P, \varphi(Q)\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{1-x^2}\,Q'(x)\right)\mathrm{d}x = \left[P(x)\,\sqrt{1-x^2}\,Q'(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P'(x)\,\sqrt{1-x^2}\,Q'(x)\,\mathrm{d}x$

$= -\displaystyle\int_{-1}^{1} P'(x)\,\sqrt{1-x^2}\,Q'(x)\,\mathrm{d}x$

Par ailleurs, $\langle \varphi(P), Q\rangle = \langle Q, \varphi(P)\rangle = -\displaystyle\int_{-1}^{1} Q'(x)\,\sqrt{1-x^2}\,P'(x)\,\mathrm{d}x$, qu'on obtient simplement en inversant les rôles de P et Q.

L'endomorphisme φ est bien symétrique.

III.B.2) Pour $k = 0$, le résultat est immédiat avec $\lambda_0 = 0$.

On travaille maintenant pour $k \geqslant 1$.

Montrons que $\varphi\left(P_k\right)$ est orthogonal à F_{k-1}. Pour cela, il suffit de montrer qu'il est orthogonal à tous les P_i de $i = 0$ à $i = k-1$.

$\langle P_i, \varphi(P_k)\rangle = \langle \varphi(P_i), P_k\rangle = 0$ car $\varphi(P_i) \in F_{k-1}$ et que P_k est orthogonal à F_{k-1}.

Alors $\varphi(P_k) = \lambda_k P_k + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i P_i$ car il appartient à F_k.

Montrons que les α_i sont tous nuls.

En effet $\langle P_i, \varphi(P_k)\rangle = \alpha_i \, \|P_i\|^2 = 0$.

On conclut que P_k est propre pour φ et la valeur propre λ_k.

En fait, on n'a pas besoin exactement du terme de plus haut degré de P_k, mais simplement de son degré.

$P_k(x) = a_k\, x^k + \cdots$ donne : $\varphi(P_k(x) = -k^2\, a_k\, x^k + \cdots = \lambda_k\, a_k\, x^k + \cdots$.

on montre ainsi que : $\lambda_k = -k^2$.

III.B.3) On a montré que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille de vecteurs propres, mais c'est aussi une base de F_n, c'est donc une base de vecteurs propres, ceci prouve que φ est diagonalisable.

III.C - Identification d'une quadrique.

III.C.1) *Cette question est hors programme TSI, les formes quadratiques n'y sont étudiées que dans* $\mathbb{R}^n$.

Notons simplement que : $q_\lambda(\alpha\, P) = \alpha^2\, q_\lambda(P)$ par application de différentes linéarités.

On verra tout à l'heure une expression de q dans une base qui est bien un polynôme du second degré des coordonnées.

III.C.2) On utilise encore la base orthonormale (Q_0, Q_1, Q_2) de F_2.

On écrit : $P = a_0\, Q_0 + a_2\, Q_1 + a_2\, Q_2$ et $\varphi(P) = -a_1\, Q_1 - 4a_2\, Q_2$.

Ce qui donne : $\|P\|^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2$ et $\langle \varphi(P), P\rangle = -a_1^2 - 4a_2^2$.

L'équation de la quadrique est alors : $\lambda\, a_0^2 + (\lambda - 1)\, a_1^2 + (\lambda - 4)\, a_2^2 = 1$.

Remarquons que la partie à gauche du signe = est bien une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.

Quant à la quadrique obtenue, tout dépend de la valeur de λ par rapport à 0, 1, 4.

$\lambda > 4$	Ellipsoïde
$\lambda = 4$	Cylindre elliptique
$4 > \lambda > 1$	Hyperboloïde à une nappe
$\lambda = 1$	Cylindre hyperbolique
$1 > \lambda > 0$	Hyperboloïde à deux nappes
$\lambda \leqslant 0$	Vide

IV Quatrième partie

IV.A - Un reste.

IV.A.1) Remarquons d'abord que : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \langle f, 1\rangle$.

Par linéarité par rapport à f, il suffit que A_0, A_1, A_2 conviennent pour les vecteurs d'une base de F_2, ici : 1, X, et X^2.

Les racines dans l'ordre imposé de $P_3 = 4X^3 - 3X$ sont : $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 0 et $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On obtient le système : $\begin{cases} I_0 = \pi = A_0 + A_1 + A_2 \\ I_1 = 0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,(-A_0 + A_2) \\ I_2 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3}{4}\,(A_0 + A_2) \end{cases}$

On le résout facilement : $A_0 = A_1 = A_2 = \dfrac{\pi}{3}$.

IV.A.2) On divise P de degré au plus 5 par P_3.

C'est à dire : $P = P_3\, Q + S$, avec Q et R de degré au plus 2.

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \langle P, 1\rangle = \langle P_3\, Q, 1\rangle + \langle S, 1\rangle = \langle P_3, Q\rangle + \langle S, 1\rangle = \langle S, 1\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{S(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

De plus, $P(x_0) = \underbrace{P_3(x_0)}_{=0}\, Q(x_0) + S(x_0) = S(x_0)$.

De la même façon : $P(x_1) = S(x_1)$ et $P(x_2) = S(x_2)$.

Ce qui prouve, en utilisant les quatre égalités obtenues, que $R(P) = R(S) = 0$.

Les A_i conviennent bien jusqu'au degré 5.

IV.B - $I = \displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{0}{\sqrt{-x^2-2x}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{(1-t)^5}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$

Mais ce sont des intégrales généralisées et ce résultat doit être justifié : on obtient la seconde intégrale par le changement de variable monotone de classe $\mathscr{C}^1$: $t = 1 + x$, les deux intégrales sont de même nature, et comme la seconde converge, elles convergent toutes les deux et, de plus, sont égales.

On applique le résultat de la question précédente et on touve : $I = \dfrac{\pi}{3}\left(\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 + 1^5 + \left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^5\right)$.

IV.C - Un autre calcul particulier d'intégrales.

IV.C.1) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \cos(2j+1)x$ est la partie réelle de $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{e}^{(2j+1)\,i\,x}$ qui est la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1 puisque $\sin x \neq 0$.

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{e}^{(2j+1)\,i\,x} = \frac{\mathrm{e}^{i\,x} - \mathrm{e}^{(2n+1)\,i\,x}}{1-\mathrm{e}^{2\,i\,x}} = \frac{1-\mathrm{e}^{2n\,i\,x}}{\mathrm{e}^{-i\,x}-\mathrm{e}^{i\,x}} = \frac{1-\mathrm{e}^{2n\,i\,x}}{-2\,i\sin x} = \frac{-1+\cos 2nx + i\sin 2nx}{2\,i\sin x}$$

D'où : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \cos(2j+1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}$ dès que $\sin x \neq 0$.

IV.C.2) Notons d'abord que : $x_j = \cos(2j+1)\dfrac{\pi}{2n}$ et donc : $P_k(x_j) = \cos(2j+1)\dfrac{k\,\pi}{2n}$.

D'autre part, $\sin\dfrac{k\,\pi}{2n}$ n'est jamais nul pour $1 \leqslant k \leqslant 2n-1$.

Ce qui donne : $S_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} P_k(x_j) = \sum_{j=0}^{n-1} \cos(2j+1)\frac{k\,\pi}{2n} = \frac{\sin 2n\dfrac{k\,\pi}{2n}}{2\sin\dfrac{k\,\pi}{2n}} = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant 2n-1$.

Et :$S_0 = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} P_0(x_j) = n$ puisque dans ce cas tous les termes de la somme valent 1.

IV.C.3) On écrit d'abord la division euclidienne de P par P_n, c'est à dire : $P = P_n\, Q + R$ avec Q et R de degré au plus $n-1$ car P est de degré au plus $2n-1$ et P_n de degré n.

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \langle P, 1\rangle = \langle P_n\, Q + R, 1\rangle = \langle P_n\, Q, 1\rangle + \langle R, 1\rangle = \langle P_n, Q\rangle + \langle R, 1\rangle = \langle R, 1\rangle.$$

Ecrivons maintenant R dans la base des P_k : $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, P_k$.

D'où $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \langle R, 1\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,\langle P_k, 1\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,\langle P_k, P_0\rangle = a_0\,\langle P_0, P_0\rangle = a_0\,\pi.$

Remarquons que $P\left(x_j\right) = R\left(x_j\right)$ car $P_k\left(x_j\right) = 0$.

Ce qui donne : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} P(x_j) = \sum_{j=0}^{n-1} R(x_j) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, P_k \left(x_j \right) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_k\, P_k \left(x_j \right) \right)$
$\displaystyle = \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k \sum_{j=0}^{n-1} P_k \left(x_j \right) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, S_k = a_0 S_0 = a_0\, n.$

Finalement : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} P(x_j).$