

Partie I.

1. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ a un rayon de convergence égal à 1.
2. En posant $x = -\frac{1}{2}$ on obtient: $\ln(2) = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.
3. (a) $\frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$ tend vers 0 pour $0 \leq x \leq 1$ et vers $+\infty$ pour $x > 1$. On en déduit que le rayon de convergence est égal à 1.

En décomposant en éléments simples $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ on a $\frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = x \frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

En changeant x en $-x$ dans le 1) on obtient $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$ d'où:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = x(-\ln(1-x)) - (-\ln(1-x) - x) = (1-x)\ln(1-x) + x.$$

(b) Pour $x = \frac{1}{2}$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = 2 \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \right) = 1 - \ln(2).$

4. (a) La série converge par le théorème des séries alternées puisque $u_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est le terme général d'une série alternée, que $\lim(u_k) = 0$ et que $|u_k| = \frac{1}{k}$ est une suite décroissante.

- (b) Pour $x \in [0, 1]$, $u_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ est le terme général d'une série alternée; de plus, $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = 0$ et $|u_k(x)| = \frac{x^k}{k}$ est une suite décroissante. On peut à nouveau appliquer le théorème des séries alternées qui donne de plus que la valeur absolue du reste est majorée par le premier terme négligé. On a donc: $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$

- (c) La série de fonction $\sum u_n(x)$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ et chaque fonction est continue. La somme de la série est donc continue sur $[0, 1]$ et par suite l'égalité $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$

s'étend à $x = 1$ d'où $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$

Partie II

1. (a) En multipliant numérateur et dénominateur par le produit des nombres pairs de 2 à $2n$ on obtient: $a_n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{n2^{n+1}n!} \times \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}.$
- (b) La formule de Stirling s'écrit: $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$
- (c) En appliquant la formule de Stirling à $n!$ et $(2n)!$ on obtient:

$$a_n = \frac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{n2^{2n+1} n^{2n} e^{-2n} 2\pi n} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi n^{3/2}}}.$$

2. (a) On intègre par parties:

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{2n} x dx = \left[\cos x \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\sin x) \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1} dx = \frac{I_{n+1}}{2n+1}.$$

- (b) On déduit du (a) que $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$.

Montrons par récurrence que $I_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{2^n n!} \frac{\pi}{2}$. C'est vrai pour $n = 1$ puisque, avec le (a), $I_1 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$. Supposons la propriété vraie pour n .

On en déduit $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{2^n n!} \frac{\pi}{2} = \frac{\prod_{k=0}^n (2k+1)}{2^{n+1} (n+1)!} \frac{\pi}{2}$. La propriété est donc vraie pour $n+1$. On en déduit qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par suite $I_n = \pi n a_n$.

3. (a) En posant $t = -\sin^2 x$ dans le développement en série entière de $\ln(1+t)$ on obtient pour $x \in [0, \pi/2[$: $\ln(1 - \sin^2 x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^{2n} x}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. La série de fonctions $(\sum f_n)_{n \geq 1}$ converge donc simplement sur $[0, \pi/2[$ vers la fonction f définie par $f(x) = -\ln(1 - \sin^2 x)$.

- (b) Appliquons le théorème d'intégration sur un intervalle de la somme d'une série de fonctions.

* Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $I = [0, \pi/2[$ (elle est continue sur le segment $[0, \pi/2]$).

* La série de fonctions $(\sum f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur I vers la fonction f qui est continue sur $[0, \pi/2[$.

* La série de terme général $\int_0^{\pi/2} |f_n(x)| dx$ converge: en effet, $\int_0^{\pi/2} |f_n(x)| dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n} x}{n} dx = \frac{I_n}{n} = \pi a_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}$ avec l'équivalent de a_n obtenu au II.1.(c). C'est le terme général d'une série de Riemann convergente puisque $\frac{3}{2} > 1$.

On en déduit que f est intégrable sur $[0, \pi/2]$ et que $\int_0^{\pi/2} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \pi a_n$

d'où enfin $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} -\ln(1 - \sin^2 x) dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$ puisque $\cos x > 0$ sur $[0, \pi/2[$.

4. (a) Dans I posons $t = \frac{\pi}{2} - x$. C'est une bijection strictement décroissante de classe C^1 de $[0, \pi/2[$ sur $]0, \pi/2]$. Puisque l'intégrale I existe on obtient $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx = \int_{\pi/2}^0 \ln(\sin t) (-dt) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt = J$. On en déduit que J existe et qu'elle est égale à I .

- (b) $I + J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x \sin x) dx = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x)) dx - \frac{\pi}{2} \ln(2)$.

En posant $x = \frac{t}{2}$ (bijection strictement croissante de classe C^1) on obtient $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x)) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(t)) dt = \frac{1}{2} (J + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(t)) dt)$.

En posant $t = \pi - u$ (bijection strictement décroissante de classe C^1 de $[\pi/2, \pi[$ sur $]0, \pi/2]$) on obtient $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(t)) dt = \int_{\pi/2}^0 \ln(\sin(\pi - u)) (-du) = J$. On a donc obtenu: $I + J = \frac{1}{2} (J + J) - \frac{\pi}{2} \ln(2)$

d'où $I = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$.

5. On en déduit $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \left(-\frac{2}{\pi}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2} \ln(2)\right) = \ln(2)$.

Partie III

1. (a) U_n est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2^{n+1}}$ et de raison $\frac{1}{2}$ donc
- $$U_n = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.$$

Avec la définition de U_n on obtient: $\frac{1}{2^k} = U_{k-1} - U_k$.

$$(b) \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k2^k} = \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k} (U_{k-1} - U_k) = \sum_{k=n+1}^N \frac{U_{k-1}}{k} - \sum_{k=n+1}^N \frac{U_k}{k}.$$

Posons $k = k' + 1$ dans la première somme: $\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k2^k} = \sum_{k'=n}^{N-1} \frac{U_{k'}}{k' + 1} - \sum_{k=n+1}^N \frac{U_k}{k} = \frac{U_n}{n+1} +$

$\sum_{k=n+1}^{N-1} U_k \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) - \frac{U_N}{N} = \frac{U_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{N-1} \frac{U_k}{k(k+1)} - \frac{1}{N2^N}$. En faisant tendre N vers $+\infty$ on

obtient: $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \frac{U_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$.

- (c) En minorant $k+1$ par $n+1$ on obtient: $0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k} = \frac{1}{n+1} R_n$ puisque

$U_k = \frac{1}{2^k}$. Comme $\frac{1}{n+1}$ a pour limite 0 on obtient $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = o(R_n)$.

- (d) On déduit du (b) et du (c) que $\frac{U_n}{n+1} = R_n + o(R_n)$ d'où $\frac{U_n}{n+1} \sim R_n$, d'où $R_n \sim \frac{U_n}{n} \sim \frac{1}{n2^n}$.

2. (a) La somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $-t \neq 1$ est égale à $\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1 - (-t)^n}{1 - (-t)} = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$.

- (b) En intégrant sur $[0, 1]$ on obtient $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k+1} = [\ln(1+t)]_0^1 - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$. Avec le résultat

de la question I.4.(c) on déduit $\ln(2) - S_n = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$ d'où $S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

- (c) En intégrant par parties on obtient:

$$S_n = (-1)^n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{1+t} \right]_0^1 - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \left(-\frac{1}{(1+t)^2} \right) dt = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt.$$

- (d) De $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{1}{n+2}$ on déduit que $\frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt = o\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ et donc $S_n \sim \frac{(-1)^n}{2(n+1)} \sim \frac{(-1)^n}{2n}$.

3. (a) L'équivalent obtenu pour a_n à la question II.1.(c) entraîne que $\lim(2\sqrt{\pi}k^{3/2}a_k) = 1$. On en déduit par définition de la limite d'une suite que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$ on ait $1 - \varepsilon \leq 2\sqrt{\pi}k^{3/2}a_k \leq 1 + \varepsilon$ ce qui donne le résultat demandé.

(b) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est continue et décroissante pour $t \geq 1$. On a donc pour $k \geq 1$:

$$\frac{1}{(k+1)^{3/2}} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^{3/2}} dt \leq \frac{1}{k^{3/2}} \text{ d'où, pour } k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{1}{t^{3/2}} dt \leq \frac{1}{k^{3/2}} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^{3/2}} dt.$$

(c) Avec le (a) et le (b) on obtient pour $k \geq N$: $\frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^{3/2}} dt \leq a_k \leq \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{k-1}^k \frac{1}{t^{3/2}} dt.$

En ajoutant pour k de $n+1$ à m on déduit $\frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{n+1}^{m+1} \frac{1}{t^{3/2}} dt \leq \sum_{k=n+1}^m a_k \leq \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_n^m \frac{1}{t^{3/2}} dt.$

Comme $\frac{3}{2} > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ existe donc on peut faire tendre m vers $+\infty$.

On obtient $\frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt \leq T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \leq \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt.$

(d) Avec $\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt = [-2t^{-1/2}]_n^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{n}}$ on déduit $\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{(n+1)\pi}} \leq T_n \leq \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{n\pi}}$ d'où $(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq T_n\sqrt{\pi n} \leq (1+\varepsilon)$. Comme $\frac{n}{n+1}$ a pour limite 1 on déduit qu'il existe $N_1 > N$ tel que pour $n \geq N_1$ on ait $(1-2\varepsilon) \leq (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq T_n\sqrt{\pi n} \leq (1+\varepsilon).$

Cela démontre que $T_n\sqrt{\pi n}$ a pour limite 1 et par suite $T_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

4. On reprend la démarche utilisée dans la question III.1:

$$\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k(k+1)2^k} = \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k(k+1)} (U_{k-1} - U_k) = \sum_{k=n+1}^N \frac{U_{k-1}}{k(k+1)} - \sum_{k=n+1}^N \frac{U_k}{k(k+1)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Posons } k = k' + 1 \text{ dans la première somme: } \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k(k+1)2^k} &= \sum_{k'=n}^{N-1} \frac{U_{k'}}{(k'+1)(k'+2)} - \sum_{k=n+1}^N \frac{U_k}{k(k+1)} = \\ \frac{U_n}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n+1}^{N-1} U_k \left(\frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{k(k+1)} \right) - \frac{U_N}{N(N+1)} &= \frac{U_n}{(n+1)(n+2)} - 2 \sum_{k=n+1}^{N-1} \frac{U_k}{k(k+1)(k+2)} - \\ \frac{1}{N(N+1)2^N}. \text{ En faisant tendre } N \text{ vers } +\infty \text{ on obtient: } V_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = \frac{U_n}{(n+1)(n+2)} - \\ 2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)(k+2)}. \end{aligned}$$

En minorant $k+2$ par $n+2$ on obtient: $0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)(k+2)} \leq \frac{1}{n+2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = \frac{1}{n+2} V_n$

puisque $U_k = \frac{1}{2^k}$. Comme $\frac{1}{n+2}$ a pour limite 0 on obtient $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)(k+2)} = o(V_n)$ d'où

$$\frac{U_n}{(n+1)(n+2)} = V_n + o(V_n), \text{ d'où } \frac{U_n}{(n+1)(n+2)} \sim V_n, \text{ d'où enfin } V_n \sim \frac{1}{n^2 2^n}.$$

Remarque: pour répondre à la question suivante on n'avait pas besoin d'un équivalent de V_n , il suffisait de majorer V_n par $\frac{1}{n^2 2^n}$. C'est immédiat en minorant $k(k+1)$ par n^2 : $V_n \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{n^2 2^n}$.

5. On a $\frac{1}{n^2 2^n} = o\left(\frac{1}{n 2^n}\right)$, $\frac{1}{n 2^n} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $\frac{1}{2^n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)$. On en déduit que $V_n = o(R_n)$, $R_n = o(S_n)$ et $S_n = o(T_n)$. La série $\left(\sum \frac{1}{k(k+1)2^k}\right)$ converge le plus rapidement (son reste tend vers 0 le plus rapidement) et la série $\left(\sum a_k\right)$ converge le moins rapidement (son reste tend vers 0 le plus lentement).