Corrigé de l'épreuve B de E3A, PSI 2010

Luc Verschueren, Lycée Daudet à Nîmes.

Deux exercices indépendants.

Exercice I. Partie A

Question 1) a) La formule de développement du déterminant selon la $j$ème colonne est :

$$\boxed{\det(M) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}M_{i,j}\det[M]_i^j}$$

où $[M]_i^j$ est la matrice obtenue en supprimant la $i$éme ligne et la $j$ème colonne de M.

En développant successivement selon les colonnes de C_1 jusqu'à C_n : $\det\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & D \end{pmatrix} = \det(D)$

La matrice $\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ est triangulaire et donc $\det\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = 1$.

En développant selon les colonnes, mais en commençant par C_{2n}, jusqu'à C_{n+1} : $\det\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \det(A)$

Question 1) b) En effectuant le produit par blocs : $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}$

Le déterminant du produit est le produit des déterminants, donc $\boxed{\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)}$

Question 1) c) Le déterminant de la transposée égale celui de la matrice donc :

$\det\begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ 0_n & {}^tD \end{pmatrix} = \det({}^tA)\det({}^tD) = \det(A)\det(D)$

Question 2) Par blocs : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ CD-DC & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}$

donc avec $\boxed{CD = DC}$, on assure que $\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} AD-BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}$

donc avec les résultats précédents : $\boxed{\det(M)\det(D) = \det(AD-BC)\det(D)}$

Si D est de plus **inversible**, on en tire $\boxed{\det(M) = \det(AD-BC)}$

Question 3) a) Pour $D_x = D - xI_n$, on a $\det(D_x) = P_D(x)$ le polynôme caractéristique de D.

Si l'on continue à supposer que $\boxed{CD = DC}$, alors $CD_x = D_xC$, et on peut appliquer le résultat précédent tant que D_x inversible, tant que $\det(D_x) \neq 0$, donc tant que $\boxed{x \notin S = \mathrm{Spec}(D)}$ le spectre dans $\mathbb{C}$ de D.

C'est un ensemble **fini** de $\mathbb{C}$, et si $x \notin S$, on a $\det(M_x) = \det(AD_x - BC)$.

Question 3) b) Si $0 \notin S$, on a déjà le résultat $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD-BC)$ avec D inversible.

Si $0 \in S$, alors il existe $h = \min\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Spec}(D),\ \lambda \neq 0\}$ et $h > 0$.

Le déterminant est une somme de produits des coefficients de la matrice M affectés d'un signe.
Chaque application composante pour (i,j) fixé, $M \mapsto M_{i,j}$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. En effet, elle est 1-Lipschitzienne, puisque $|M_{i,j} - P_{i,j}| \leqslant N_\infty(M-P)$ pour tout couple de matrices (M,P) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en prenant $N_\infty(M) = \sup\limits_{i,j\in\{1,\dots,n\}}|M_{i,j}|$ norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Par les théorèmes opératoires : $\boxed{\text{l'application déterminant est continue de } (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), N_\infty) \text{ dans } (\mathbb{C}, |\ |)}$

Et de même pour toutes les normes, puisqu'on est en dimension finie, elles sont équivalentes.

Les applications $\Phi : x \mapsto \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D_x \end{pmatrix}$ et $\Psi : x \mapsto \det(AD_x - BC)$ sont donc **continues** de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Elles sont **égales** pour $x \notin S$, donc pour $x \in \mathring{B}(0,h) \setminus \{0\}$ et par exemple $\Phi\left(\frac{1}{2^n}\right) = \Psi\left(\frac{1}{2^n}\right)$ pour n assez grand. En passant à la limite quand $n \to \infty$, on a $\Phi(0) = \Psi(0)$ $\boxed{\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC) \text{ si } CD = DC}$.

Partie B

La base canonique est la base $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ dans cet ordre.

Questions 1) et 2) $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{L}_A$ sont clairement linéaires et en détaillant l'image de la matrice $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

on a $R_A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$ et $L_A = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$. D'où $M_A = \begin{pmatrix} a - aq & -qc & b & 0 \\ -qb & a - qd & 0 & b \\ c & 0 & d - qa & -qc \\ 0 & c & -qb & d - dq \end{pmatrix}$

ainsi par blocs : $\boxed{M_A = \begin{pmatrix} aI_2 - q\,{}^tA & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 - q\,{}^tA \end{pmatrix}}$

Question 3) a) D'abord, transposons : $\det(M_A) = \det({}^tM_A) = \begin{pmatrix} aI_2 - qA & cI_2 \\ bI_2 & dI_2 - qA \end{pmatrix}$ et les matrices

$C = bI_2$ et $D = dI_2 - qA$ commutent donc on peut appliquer la partie A :

$$\det(M_A) = \det\big((aI_2 - qA)(dI_2 - qA) - bcI_2\big) = \det\big((ad - bc)I_2 - q(a+d)A + q^2A^2\big)$$

Or $(ad - bc)I_2 = \det(A)I_2 = A \times \widetilde{A}$ car on reconnaît en $\widetilde{A}$ la transposée de la comatrice de A.

Ainsi $\boxed{\det(M_A) = \det\Big(A \times \widetilde{A} - q(a+d)A + q^2A^2\Big) = \det(A)\det\Big(\widetilde{A} - q(a+d)I_2 + q^2A\Big)}$

Question 3) b) Par coefficients : $\widetilde{A} - q(a+d)I_2 + q^2A = \begin{pmatrix} (1-q)(d-aq) & (q^2-1)b \\ (q^2-1)c & (1-q)(a-dq) \end{pmatrix}$

Dans le calcul du déterminant, on peut (par multilinéarité) factoriser $(1-q)$ dans la première **et** la deuxième colonne, d'où $\boxed{\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\det\begin{pmatrix} d - aq & -(q+1)b \\ -(q+1)c & a - dq \end{pmatrix}}$

Question 3) c) Cette dernière matrice a pour déterminant :

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} d - aq & -(q+1)b \\ -(q+1)c & a - dq \end{pmatrix} &= (d-aq)(a-dq) - (q+1)^2bc \\ &= \big(a + d - a(q+1)\big)\big(a + d - d(q+1)\big) - (q+1)^2bc \\ &= (ad - bc)(q+1)^2 + (a+d)^2\big(1 - (q+1)\big)\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\left(\det(A)(q+1)^2 - q(\mathrm{Tr}(A))^2\right)}$

Question 4) a) Puisque l'on est dans $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique a 2 racines éventuellement confondues, qui sont les valeurs propres de A, comptées avec leurs multiplicités.

Ainsi $P_A(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A) = (X - \alpha)(X - \beta)$ avec $\begin{cases} \mathrm{Tr}(A) = a + d = \alpha + \beta \\ \det(A) = ad - bc = \alpha.\beta \end{cases}$

Ainsi $P_A(q\alpha) = (q\alpha - \alpha)(q\alpha - \beta)$

$$\begin{aligned}\text{et } P_A(q\alpha)P_A(q\beta) &= (q\alpha - \alpha)(q\alpha - \beta)(q\beta - \alpha)(q\beta - \beta) = (q-1)^2\alpha\beta(q\alpha - \beta)(q\beta - \alpha) \\ &= (q-1)^2\alpha\beta(\alpha\beta + q^2\alpha\beta - q(\alpha^2 + \beta^2)) \\ &= (q-1)^2\alpha\beta\left((1+q)^2\alpha\beta - q(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta)\right)\end{aligned}$$

On retrouve $\boxed{P_A(q\alpha)P_A(q\beta) = (1-q)^2\det(A)\left((1+q)^2\det(A) - q(\mathrm{Tr}(A))^2\right) = \det(M_A)}$

Question 4) b) L'endomorphisme $\mathcal{M}_A : X \mapsto AX - qXA$ a pour matrice M_A dans la base $\mathcal{B}$.

$\boxed{\text{Il existe une matrice } B \text{ non nulle, de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ telle que } AB = qBA \text{ si et seulement si } \ker(\mathcal{M}_A) \neq \{0_2\}}$

si et seulement si $\det(M_A) = 0$ si et seulement si $\boxed{P_A(q\alpha) = 0 \text{ ou } P_A(q\beta) = 0}$

Or $\mathrm{Spec}(A) = \{\alpha, \beta\}$ est l'ensemble des racines de P_A.

Donc $\big(P_A(q\alpha) = 0 \text{ ou } P_A(q\beta) = 0\big) \iff \big(q\alpha = \alpha \text{ ou } q\alpha = \beta \text{ ou } q\beta = \alpha \text{ ou } q\beta = \beta\big)$

et puisque $q \neq 0$ et $q \neq 1$ cela équivaut à $\big(\alpha = 0 \text{ ou } q\alpha = \beta \text{ ou } q\beta = \alpha \text{ ou } \beta = 0\big)$

ou encore à $\boxed{\big(\det(A) = 0 \text{ ou } q\alpha = \beta \text{ ou } q\beta = \alpha\big)}$

Question 5) Si A est non nulle, telle que $\ker(\mathcal{M}_A) \neq \{0_2\}$, distinguons trois cas (l'endomorphisme canoniquement asocié à A est noté f).

- Si $\det(A) \neq 0$, alors A admet deux valeurs propres **distinctes** (car $q \neq 1$) , le spectre est de la forme

  $\mathrm{Spec}(A) = \{\alpha, q\alpha\}$ (qui à échanger α et β) donc A est diagonalisable en $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & q\alpha \end{pmatrix}$.

- Si $\det(A) = 0$ et $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, alors A admet deux valeurs propres **distinctes**, $\mathrm{Spec}(A) = \{0, \mathrm{Tr}(A)\}$

  et A est donc (condition suffisante de diagonalisabilité) diagonalisable en $A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si $\det(A) = 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors A a pour polynôme caractéristique $P_A(X) = X^2$, qui est annulateur pour f, 0 est la seule valeur propre (double). Mais $A \neq 0_2$, donc il existe v_1 tel que $f(v_1) \neq 0$

  et dans la famille libre $(f(v_1), v_1)$ la matrice de f est $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette famille est libre

  car si $\lambda f(v_1) + \mu v_1 = 0$, alors en appliquant f, on a $\mu f(v_1) = 0$ (car $f^2(v_1) = 0$) donc $\mu = 0$, donc $\lambda = 0$. C'est bien une base.

$\boxed{A \text{ est donc semblable à une matrice de l'un des trois types donnés.}}$

Exercice II. Partie A

Question 1) a) Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant 0$ et $b_n \geqslant 0$. (Initialisation et hérédité claires).

Question 1) b) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2$ qui est donc positif.

Question 2) **Initialisation** : Pour $n = 1$, on a $0 \leqslant a_1$, $0 \leqslant b_1$ et $a_1 - b_1 = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a_0} - \sqrt{b_0}\right)^2 \geqslant 0$.

Donc $\boxed{0 \leqslant b_1 \leqslant a_1}$ d'où l'on tire $\begin{cases} 0 \leqslant b_1 + a_1 \leqslant 2a_1 \text{ d'où } a_2 \leqslant a_1 \\ 0 \leqslant b_1^2 \leqslant a_1 b_1 \text{ d'où } 0 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \\ \text{et avec A) 1) b)} \quad 0 \leqslant a_2 - b_2 \end{cases}$ et $\boxed{0 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant a_2 \leqslant a_1}$

Hérédité : si la propriété $0 \leqslant b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$ est vraie à l'ordre n avec les mêmes arguments on assure que $0 \leqslant b_{n+1} \leqslant b_{n+2} \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1}$, donc la propriété est assurée à l'ordre $n + 1$.

Par récurrence, on a le résultat $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1 : 0 \leqslant b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n}$

Question 3) Pour tout $n \geqslant 1$: $\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 = a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n} = a_n + b_n - 2b_{n+1} \leqslant a_n - b_n$

Donc pour tout $n \geqslant 1 : 0 \leqslant a_{n+1} - b_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(a_n - b_n)$ et donc $|a_{n+1} - b_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|a_n - b_n|$

d'où par récurrence : $\boxed{\forall n \geqslant 1 : |a_n - b_n| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}|a_1 - b_1|}$ et $a_1 - b_1 = \dfrac{a + 1 - 2\sqrt{a}}{2} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{a} - 1)^2$.

Distinguons : $\begin{cases} \text{si } 0 \leqslant a \leqslant 1 \text{ alors } 0 \leqslant a \leqslant \sqrt{a} \text{ donc } a + 1 - 2\sqrt{a} \leqslant 1 - a \text{ et } |a_1 - b_1| \leqslant \dfrac{1}{2}|1 - a| \\ \text{si } 1 \leqslant a \text{ alors } 0 \leqslant 1 \leqslant \sqrt{a} \text{ donc } a + 1 - 2\sqrt{a} \leqslant a - 1 \text{ et } |a_1 - b_1| \leqslant \dfrac{1}{2}|1 - a| \end{cases}$

donc $\boxed{\forall n \geqslant 1 : |a_n - b_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|1 - a|}$

Question 4) Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc **adjacentes**, car $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et $(a_n - b_n) \to 0$.

Elles convergent donc vers la même limite ℓ et on a $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1 : 0 \leqslant b_n \leqslant \ell \leqslant a_n}$

Partie B

Question 1) Pour tout $x \geqslant 0$ servant de valeur initiale pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et convergent vers une limite $f(x)$. $\boxed{\text{C'est la convergence simple sur } [0,\infty[}$

Question 2) a) Pour $\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}$, on a $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ b_1 = 0 \end{cases}$ puis $\begin{cases} a_2 = \frac{1}{4} \\ b_2 = 0 \end{cases}$ et par récurrence $\begin{cases} a_n = \frac{1}{2^n} \\ b_n = 0 \end{cases}$ pour tout $n \geqslant 1$. D'où $\boxed{f(0) = 0}$

$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 1 \end{cases}$, on a $\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 1 \end{cases}$ et par récurrence $\begin{cases} a_n = 1 \\ b_n = 1 \end{cases}$ pour tout $n \geqslant 1$. D'où $\boxed{f(1) = 1}$

Question 2) b) La suite $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroit et $(b_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ croit : on a $\forall x \geqslant 0,\ \ 0 \leqslant b_1(x) \leqslant f(x) \leqslant a_1(x)$ donc $\boxed{\forall x \geqslant 0,\ \ 0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x+1}{2}}$ La proposition demandée dans l'énoncé étant visiblement impossible puisque l'on n'a pas $\sqrt{x} \leqslant x$ pour $x \in\ ]0,1[$.

Question 3) Pour $A > 0$, et $n \geqslant 1$, sur $[0,A]$, $\ 0 \leqslant b_n(x) \leqslant f(x) \leqslant a_n(x)$ et $\begin{cases} |f(x) - b_n(x)| \leqslant |a_n(x) - b_n(x)| \\ |f(x) - a_n(x)| \leqslant |a_n(x) - b_n(x)| \end{cases}$

or sur $[0,A]$: $|a_n(x) - b_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}|1-x| \leqslant \frac{B}{2^n}$ où $B = \max(1, |A-1|)$.

Donc les deux fonctions $x \mapsto |f(x) - b_n(x)|$ et $x \mapsto |f(x) - a_n(x)|$ sont bornées sur $[0,A]$ et

$\boxed{N_\infty^{[0,A]}(f - a_n) = \sup_{[0,A]}|f(x) - a_n(x)| \leqslant \frac{B}{2^n}}$ qui tend vers 0 quand $n \to \infty$,

d'où $\boxed{\text{la convergence uniforme sur } [0,A]}$ de la suite des fonctions $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f quand n tend vers ∞. De même pour la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f.

Question 4) Par **récurrence** les fonction a_n et b_n sont **continues** sur $[0,\infty[$ donc sur $[0,A]$. Par la convergence uniforme sur $[0,A]$, la continuité se transmet à la fonction f. La fonction f est donc continue sur tous les segments $[0,A]$ pour $A > 0$ quelconque et fixé. Ainsi f est continue au voisinage de tous les x de $[0,\infty[$, car chacun d'entre eux peut être mis dans un segment $[0,A]$ pour A assez grand. $\boxed{f \text{ est continue sur } [0,\infty[}$

Partie C

Question 1) Le contenu du radical reste strictement positif, φ est continue et strictement positive sur $]-\infty,\infty[$. De plus quand $t \to \infty$: $\varphi(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t^4}} = \frac{1}{t^2}$ fonction de Riemann d'exposant $\alpha = 2$ donc intégrable sur $[1,\infty[$.

De même quand $t \to -\infty$. Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est intégrable sur }]-\infty,\infty[, \text{ et paire.}}$

Question 2) Notons $k : (x,t) \mapsto \frac{1}{\sqrt{(t^2+x^2)(t^2+1)}}$. C'est une fonction de classe C^1 sur $]0,\infty[\times]0,\infty[$, et on a : $\frac{\partial k}{\partial x}(x,t) = -\frac{x}{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}(t^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Considérons a et b réels tels que $0 < a < b$, et plaçons nous sur le pavé : $\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,\infty[$, $\left|\frac{\partial k}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{b}{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \psi(t)$.

Cette fonction ψ domine la dérivée partielle et elle est **intégrable** sur $]0,\infty[$ (mêmes arguments qu'en C) 1)). Le thm de dérivation sous domination (de Leibniz) assure donc que g est de classe C^1 sur $[a,b]$ et que

$g'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial k}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$. Puisqu'on a le résultat sur chaque segment $[a,b]$ pour $0 < a < b$, comme en B) 4) on assure que g est C^1 au voisinage de tous les $x > 0$, donc que $\boxed{g \text{ est } C^1 \text{ sur }]0,\infty[}$.

Question 3) a) La fonction S_x est définie et C^1 sur l'intervalle $]0,\infty[$, avec $S_x'(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{t^2}\right) > 0$.

Donc S_x est une bijection C^1 de $]0,\infty[$ sur $S_x(]0,\infty[) =]-\infty,\infty[$, c'est même un C^1-difféomorphisme entre ces intervalles. (Thm de caractérisation des difféomorphisme, ou Thms de la bijection et de sa dérivation).

Question 3) b) Le changement de variable est un C^1-difféomorphisme, qui conserve l'intégrabilité et la valeur de l'intégrale. De plus $\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha\beta}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ pour $x = \alpha\beta$ et :

$$s^2 + \left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(t - \frac{\alpha\beta}{t}\right)^2 + \left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(t^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{t^2} - 2\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\right) = \frac{1}{4t^2}(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)$$

$$s^2 + \alpha\beta = \frac{1}{4}\left(t - \frac{\alpha\beta}{t}\right)^2 + \alpha\beta = \frac{1}{4}\left(t^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{t^2} - 2\alpha\beta + 4\alpha\beta\right) = \frac{1}{4}\left(t + \frac{\alpha\beta}{t}\right)^2$$

donc :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\left(s^2 + \left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)(s^2+\alpha\beta)}} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(1+\frac{\alpha\beta}{t^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\frac{1}{4t^2}(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)\frac{1}{4}\left(t+\frac{\alpha\beta}{t}\right)^2}}$$

donc $\boxed{\forall \alpha > 0,\ \ \forall \beta > 0,\ \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\left(s^2 + \left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)(s^2+\alpha\beta)}} = 2\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}}$

Question 3) c) Par parité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\left(s^2 + \left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)(s^2+\alpha\beta)}} = 2\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\left(s^2 + \left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)(s^2+\alpha\beta)}}$

donc $\boxed{\forall \alpha > 0,\ \ \forall \beta > 0,\ \ \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(t^2 + \left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)(t^2+\alpha\beta)}} = \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}}$

Partie D

Question 1) Avec la question ci-dessus : pour $\alpha = a_n(x) > 0$ et $\beta = b_n(x) > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a_n^2(x))(t^2+b_n^2(x))}} = \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a_{n+1}^2(x))(t^2+b_{n+1}^2(x))}} \text{ indépendante de } n.$$

Donc, en remontant jusqu'à $n = 0$, et $a_0(x) = x > 0$, $b_0(x) = 1$:

$$\boxed{\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad : \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a_n^2(x))(t^2+b_n^2(x))}} = \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+x^2)(t^2+1)}} = g(x)}$$

Question 2) a) Pour tout $t > 0$ et $x > 0$ fixés, la convergence simple des suites $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $f(x) > 0$ assure que $\boxed{\lim_{n\to\infty} h_n(t) = \frac{1}{t^2+(f(x))^2}}$

Question 2) b) h_n est strictement positive sur $]0,\infty[$ pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$.

De plus, puisque $\forall x > 0,\ 0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant f(x)$, on a $t^2 + \sqrt{x}^{\,2} \leqslant t^2 + (f(x))^2$ et donc $\boxed{0 < h_n(t) \leqslant \frac{1}{t^2+x}}$

Question 2) c) Pour tout $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+x}$ domine la suite des fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et elle est intégrable sur $[0,\infty[$, car continue, positive sur $[0,\infty[$ et équivalente quand $t \to \infty$, à la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$, intégrable sur $[1,\infty[$. Le thm de convergence dominée assure donc que $\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+(f(x))^2}}$

Avec $f(x) > 0$, on a de plus $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+(f(x))^2} = \frac{1}{f(x)}\left[\arctan\left(\frac{t}{f(x)}\right)\right]_{t=0}^{t\to\infty}$ donc $\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2f(x)}}$

Question 2) d) La suite des intégrales est constante, donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} h_0(t)\,\mathrm{d}t = g(x)$ pour $x > 0$,

donc $\boxed{f(x) = \frac{\pi}{2g(x)}}$ avec g strictement positive et de classe C^1 sur $]0,\infty[$ et $\boxed{f \text{ est aussi } C^1 \text{ sur }]0,\infty[}$.