a.chabchi@lydex.ma

Inégalités de Bernstein

Partie I : Inégalité polynomiale de Bernstein et applications

I.A Polynômes de Tchebechev

1. On établit par réccurence sur n : $\forall\ k \leq n,\ \deg(T_k) = k$. Pour $n = 0$ et $n = 1$ c'est vrai, puis pour $n \geq 2$, on suppose vrai à l'ordre $(n-1)$, alors la relation $T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}$ et l'hypothèse de réccurence assurent en particulier $\deg(T_n) = n$ et par suite $\deg(T_k) = k$ pour $k \leq n$.

   Ainsi, si $B = (1, X, ..., X^n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$, la matrice de la famille $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ dans B est triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont non nuls, elle est donc inversible. Ainsi $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Encore à l'aide d'une réccurence forte, pour $n \leq 1$ c'est vrai. Soit $n \geq 2$, on suppose le résultat vrai à l'ordre $(n-1)$, donc pour tout $k \leq n-1$, $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$ selon l'hypothèse de réccurence, puis la relation $T_n(X) = 2XT_{n-1} - T_{n-2}$, donne $T_n(\cos\theta) = 2\cos\theta T_{n-1}(\cos\theta) - T_{n-2}(\cos\theta)$

   $= 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta = \cos((n-1)\theta+\theta) + \cos((n-1)\theta-\theta) - \cos(n-2)\theta = \cos(n\theta)$.

3. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, puisque $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de cet espace, alors il existe $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k T_k$, donc

$$P(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(\cos\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\theta)$$

   D'où le résultat.

4. Pour $x \in [-1,1]$, il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$, donc $|T_n(x)| = |T_n(\cos\theta)| = |\cos n\theta| \leq 1$, avec égalité pour $x = 1$ $(\theta = 0)$, donc $\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} = 1$.

5. A l'aide d'une réccurence simple, en écrivant $\sin(n+1)\theta = \sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta$, on obtient pour tout n et tout θ : $|\sin n\theta| \leq n|\sin\theta|$.

   Par ailleurs, on a par dérivation, $\sin(\theta)T_n'(\cos\theta) = n\sin(n\theta)$, donc $|\sin\theta||T'(\cos\theta)| = n|\sin n\theta| \leq n^2|\sin\theta|$, ainsi pour tout $\theta \in]0,\pi[$, on a $\sin\theta \neq 0$, donc $|T_n'(\cos\theta)| \leq n^2$, or les $\cos\theta$, $\theta \in]0,\pi[$ couvrent l'intervalle $]-1,1[$, ainsi $\forall\ x \in]-1,1[$, $|T_n'(x)| \leq n^2$, enfin cette inégalité est valable en $x = \pm 1$, par continuité de T_n'. D'où le résultat.

I.B Inégalité de Bernstein

6. On considère la fraction rationnelle $Q(X) = \dfrac{B(X)}{A(X)}$, puisque $\deg(B) < \deg(A)$ et les pôles de Q sont simples et notés $\alpha_1, ..., \alpha_{2n}$, alors la décomposition de Q dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit :

$$Q(X) = \frac{B(X)}{A(X)} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\lambda_i}{X-\alpha_i},\ \text{où les } \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

   Soit $k \in \{1, ..., 2n\}$, en écrivant $A(X) = (X-\alpha_k)A_k(X)$, par dérivation on a : $A'(\alpha_k) = A_k(\alpha_k)$, d'autres part on a

$$\lambda_k = (X-\alpha_k)\frac{B(X)}{A(X)}\Big|_{\text{évaluée en } x=\alpha_k} = \frac{B(\alpha_k)}{A_k(\alpha_k)} = \frac{B(\alpha_k)}{A'(\alpha_k)}$$

   D'où l'égalité cherchée.

7. On a $P_\lambda(1) = P(\lambda) - P(\lambda) = 0$, donc 1 est racine de P_λ, par suite $X-1$ divise P_λ.

8. On a $(X-1)Q_\lambda(X) = P(\lambda X) - P(X)$, en dérivant cette relation, puis en évaluant en $x = 1$, on obtient : $Q_\lambda'(1) = \lambda P'(\lambda)$.

9. R est scindé et ses racines complexes sont les racines 2nème de -1, donc sont exactement les $(\omega_k)_{1\leq k\leq n}$, d'où la décomposition cherchée de R.

10. En prenant $A = R$ qui est de degré $2n$ scindé à racines simples et puisque $\deg(Q_\lambda) \leq 2n-1$, donc les hypothèses de la Q.6 sont satisfaites, ainsi

$$Q_\lambda(X) = \sum_{k=1}^{2n} Q_\lambda(\omega_k) \frac{R(X)}{(X-\omega_k) R'(\omega_k)}$$

pour conclure il suffit de remplacer Q_λ et R par leurs valeur, puis de remarquer que $R'(\omega_k) = 2n\ \omega_k^{2n-1} = -\dfrac{2n}{\omega_k}$.

En évaluant en $x = 1$, et selon la Q.8, on obtient alors :

$$Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} P(\lambda) \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}$$

11. Comme indiqué, en prenant $P(X) = X^{2n} \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ dans $(I.2)$, on obtient :

$$2n\lambda^{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} (\lambda\omega_k)^{2n} \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \lambda^{2n} \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = -\frac{\lambda^{2n}}{2n} 2\sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}$$

ceci pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, donc

$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = n$$

En reportant cela dans $(I.2)$ on obtient le résultat cherché.

12. On convient que $b_0 = 0$, ainsi :

$$\begin{aligned} e^{in\theta} f(\theta) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta) = e^{in\theta} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a_k + ib_k}{2} + \frac{a_k - ib_k}{2}\right)\cos(k\theta) + \\ e^{in\theta}\sum_{k=0}^{n} i\left(\frac{a_k - ib_k}{2} - \frac{a_k + ib_k}{2}\right)\sin(k\theta) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{i(n-k)\theta} + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{i(n+k)\theta} \end{aligned}$$

qui est bien un polynôme U en $e^{i\theta}$ de degré $\leq 2n$.

13. Il est claire que $\dfrac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = \dfrac{2e^{i\varphi_k}}{(1-e^{i\varphi_k})^2} = \dfrac{2e^{i\varphi_k}}{e^{i\varphi_k}\left(e^{-i\varphi_k/2} - e^{i\varphi_k/2}\right)^2} = \dfrac{2}{(-2i\sin(\varphi_k/2))^2} = \dfrac{-1}{2\sin^2(\varphi_k/2)}$.

Selon Q.12, il existe $U \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que $f(\theta) = e^{-in\theta} U\left(e^{i\theta}\right)$, donc $f'(\theta) = -in\ f(\theta) + ie^{-in\theta} e^{i\theta} U'\left(e^{i\theta}\right)$, en appliquant Q.11 pour $P = U$ et $\lambda = e^{i\theta}$, on obtient

$$f'(\theta) = -in\ f(\theta) + ie^{-in\theta} \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} U\left(e^{i\theta}\omega_k\right) \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} + in\ f(\theta)$$

Or $\omega_k^{-n} = e^{-i(\pi/2+k\pi)} = i\times(-1)^{k+1}$, donc $ie^{-in\theta} U\left(e^{i\theta}\omega_k\right) = (-1)^{k+1} e^{-in(\theta+\varphi_k)} U\left(e^{i\theta}\omega_k\right) = (-1)^{k+1} f(\theta+\varphi_k)$, la question Q.13 assure alors que

$$f'(\theta) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} f(\theta+\varphi_k) \frac{(-1)^k}{2\sin^2(\varphi_k/2)}$$

14. D'après la question Q.13, f étant bornée sur $\mathbb{R}$, on a :

$$|f'(\theta)| \leq \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sum_{k=1}^{2n} \left|\frac{(-1)^k}{2\sin^2(\varphi_k/2)}\right| = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{-2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.(Q.11)$$

I.C Quelques conséquences

15. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on pose pour θ réel $f(\theta) = P(\cos(\theta))$, alors selon Q.3 la fonction f est élément de $\mathcal{S}_n$, et donc à l'aide de Q.14, on aura

$$|f'(\theta)| = \left|\sqrt{1-\cos^2(\theta)}P'(\cos\theta)\right| \leq n\,\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

Il suffit alors de poser pour $-1 \leq x \leq 1,\ \ x = \cos(\theta)$ et de remarquer que $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|P\|_{L^\infty([-1,1])}$

16. On pose $f(\theta) = Q(\cos\theta)\sin\theta$, puisque $\deg Q \leq n-1$, alors par Q.3, on a $\theta \longmapsto Q(\cos\theta)$ appartient à $\mathcal{S}_{n-1}$, donc il existe $a_0, ..., a_{n-1}, b_1, ..., b_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que :

$$f(\theta) = \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos(k\theta) + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin(k\theta)\right)\sin\theta$$

en linéairisant les produits $\cos(k\theta)\sin\theta$ et $\sin(k\theta)\sin\theta$, on observera que $f \in \mathcal{S}_n$; donc à l'aide de Q.14, on aura

$$|f'(\theta)| = \left|\sin^2(\theta)\,Q'(\cos\theta) + Q(\cos\theta)\cos\theta\right| \leq n\,\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

Pour $\theta = 0$, on aura : $|Q(1)| \leq n \sup\limits_{\theta\in\mathbb{R}} |Q(\cos\theta)\sin\theta| = n \sup\limits_{-1\leq x\leq 1} \left|Q(x)\sqrt{1-x^2}\right|$. CQFD

17. Soit $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $t \in [-1,1]$, on pose $S_t(X) = R(tX)$, on a bien $\deg S_t \leq n-1$, donc la question Q.16 assure :

$$|S_t(1)| = |R(t)| \leq n \sup_{-1\leq x\leq 1}\left|S_t(x)\sqrt{1-x^2}\right| = n \sup_{-1\leq x\leq 1}\left|R(tx)\sqrt{1-x^2}\right|.$$

Puisque $|t| \leq 1$, alors pour tout $x \in [-1,1]$, ona $|tx| \leq |x| \leq 1$ et $\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{1-(tx)^2}$, par suite il vient

$$|R(t)| \leq n \sup_{-1\leq x\leq 1}\left|R(tx)\sqrt{1-(tx)^2}\right| \leq n \sup_{-1\leq x\leq 1}\left|R(x)\sqrt{1-x^2}\right|$$

18. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, donc $P' \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, donc en appliquant successivement Q.17 et Q.15 on aura :

$$\forall\ t \in [-1,1],\ |P'(t)| \leq n \sup_{-1\leq x\leq 1}\left|P'(x)\sqrt{1-x^2}\right| \leq n \times n \times \|P\|_{L^\infty([-1,1])}$$

D'où le résultat.

19. La majoration ci-dessus est optimale puisque l'égalité est atteinte pour $P = T_n$ le nème polynôme de Tchebechev selon Q.4 et Q.5.

II Inégalités de Bernstein et transformée de Fourier

II.A Transformée de Fourier d'une fonction

20. On a pour tout ξ réel, la fonction $x \longmapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, la fonction $\xi \longmapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus on a la domination :

$$\forall\ x,\xi \in \mathbb{R},\ \left|f(x)e^{-ix\xi}\right| \leq |f(x)|,\ \text{avec } f \text{ continue et intégrable sur } \mathbb{R}$$

Donc par le théorème de continuité sous l'intégrale, $\widehat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

21. On a d'abord pour pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall\ \xi \in \mathbb{R}$, $\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \|f\|_1$, donc $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$; puis $f \longmapsto \widehat{f}$ est linéaire par linearité de l'intégrale.

22. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, et $\lambda > 0$, l'application $x \longmapsto \lambda x$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}$ vers lui même, donc le changement $t = \lambda x$ assure l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda x)|\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$$

Ainsi $g \in L^1(\mathbb{R})$.
Le même changement de variables fournit :

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda x)\,e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-\frac{it\xi}{\lambda}}dt = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

II.B Produit de convolution

23. On suppose $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, on a pour tout x réel, la fonction $t \longmapsto f(t)\,g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie
$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ |f(t)\,g(x-t)| \leq \|g\|_\infty\,|f(t)|$$
puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $t \longmapsto \|g\|_\infty\,|f(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, il en découle que $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Le changement de variable $u = x - t$ qui réalise une bijection strictement décroissante de classe C^1 de $\mathbb{R}$ vers lui même prouve que
$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(x-u)\,g(u)\,du = (g*f)(x)$$

24. Pour tout x réel, on a la majoration
$$|(f*g)(x)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)\,g(x-t)|\,dt \leq \|g\|_\infty\,\|f\|_1\,.$$

25. On note $h(x,t) = f(t)\,g(x-t)$, on vérifie des hypothéses **larges** de dérivation sous l'intégrale.

- On a $\forall\, j \in \{0,...,k\}$, $\dfrac{\partial^j h}{\partial x^j}(x,t) = f(t)\,g^{(j)}(x-t)$ existe sur $\mathbb{R}^2$ et y est continue par morceaux par rapport à t et continue par rapport à x sur $\mathbb{R}$.
- On a $\forall\, j \in \{0,...,k\}$, $\forall\, x,t \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial^j h}{\partial x^j}(x,t)\right| \leq \left\|g^{(j)}\right\|_\infty |f(t)|$, cette dernière fonction étant indépendante de x et intégrable sur $\mathbb{R}$, donc par le théorème de dérivation sous l'intégrale, $f * g$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et par la formule de Leibniz :
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ (f*g)^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g^{(k)}(x-t)\,dt = \left(f * g^{(k)}\right)(x)$$

26. On a d'abord $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, donc $f*g$ existe, puis on suppose $f*g \in L^1(\mathbb{R})$, donc la question Q.20 assure que $\widehat{f*g}$ existe, de plus on a
$$\left(\widehat{f*g}\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x)\,e^{-ix\xi}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt\right)e^{-ix\xi}dx$$
Selon le théorème de Fubini admis, on peut inverser l'ordre des intégration :
$$\left(\widehat{f*g}\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\,e^{-ix\xi}dx\right)f(t)\,dt$$
Puis à l'aide du changement de variables $u = x - t$ (translation de variable), on obtient :
$$\left(\widehat{f*g}\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,e^{-iu\xi}du\right)e^{-it\xi}f(t)\,dt = \widehat{g}(\xi) \times \widehat{f}(\xi)$$
Ainsi la transormée de Fourier d'un produit de convolution est le produit usuel des transformées de Fourier.

II.C Introduction d'une fonction plateau

27. On a $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow 0^-} \varphi(t) = 0 = \varphi(0)$, donc φ est continue en particulier 0, puis continue sur $\mathbb{R}$ et à l'aide des théorèmes généraux φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, par réccurence immédiate, on prouve l'existence d'un polynôme P_k tel que :
$$\forall\, t > 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ \varphi^{(k)}(t) = P_k\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}$$
donc par croissance comparée, $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} \varphi^{(k)}(t) = 0$ qui vaut aussi de manière évidente $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^-} \varphi^{(k)}(t)$. donc par le théoème de prolongement des applications de classe C^1 généralisé, φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et toutes ses dérivées en 0 sont nulles.

28. On a clairement pour tout réel t : $\psi(t) = \varphi\left(1-t^2\right)$, donc ψ est de classe C^∞ comme composée C^∞.

29. Pour tout réel x, on a : $\theta(x) = \int_0^x \psi(t)\,dt$, donc ψ est de classe C^∞ comme primitive de fonction C^∞. De plus

$$\theta'(x) = \psi(x) = 0 \text{ sur chacun des intervalles }]-\infty,-1] \text{ et } [1,+\infty[$$

Donc θ est constante sur ces deux intervalles et vaut comme précisé A et B. En particulier on a

$$B = \theta(1) = \int_0^1 e^{1/(t^2-1)}dt \neq 0 \text{ et } A = \theta(-1) = \int_0^{-1} e^{1/(t^2-1)}dt = -B \neq B$$

30. La fonction θ définie ci-dessus permet de faire relier de manière lisse (contact C^∞) entre deux constantes distinctes A et B. On va se servir de θ pour relier de manière lisse les constantes 0 et 1 sur chacun des intervalles $[-2,-1]$ et $[1,2]$, on posera alors

$$\rho(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } |t| \leq 1 \\ \dfrac{\theta(2t-3)-B}{A-B} \text{ si } 1 < t \\ \dfrac{\theta(-2t-3)-B}{A-B} \text{ si } t < -1 \end{cases}$$

On a bien ρ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ vaut 1 sur $[-1,1]$ et nulle en dehors de $[-2,2]$ d'après les propriètés satisfaites par θ.

II.D Inégalité de Bernstein

31. Puisque ρ est nulle en dehors de $[-2,2]$, alors $r(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-2}^2 e^{ix\xi}\rho(\xi)\,d\xi$. on pose alors $h(x,\xi) = e^{ix\xi}\rho(\xi)$.

On vérifie encore des hypothèses **larges** de dérivation sous l'intégrale, en effet :

- On a $\forall\ k \in \{0,1\}$, $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,\xi) = (i\xi)^k e^{ix\xi}\rho(\xi)$ existe sur $\mathbb{R}\times[-2,2]$ et y est continue par morceaux par rapport à ξ et continue par rapport à x sur $[-2,2]$.
- On a $\forall\ k \in \{0,1\}$, $\forall\ [a,b] \subset \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}\right|$ est continue sur le compact $[a,b]\times[-2,2]$, donc bornée par une constante C, cette fonction constante C étant indépendante de x et intégrable sur $[-2,2]$, donc par le théorème de dérivation sous l'intégrale, r est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et par la formule de Leibniz :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ r'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^2 \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^2 i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi)\,d\xi$$

32. A l'aide d'une intégration par parties, on obtient pour $x \neq 0$:

$$r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\rho(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{ix\xi}}{ix}\rho(\xi)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix\xi}}{ix}\rho'(\xi)\,d\xi$$

le terme exponentiel est borné et ρ de limite nulle en $\pm\infty$, donc le crochet est nul, ainsi :

$$r(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix\xi}}{ix}\rho'(\xi)\,d\xi$$

Une seconde intégration par parties analogue donnera :

$$r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix\xi}}{(ix)^2}\rho''(\xi)\,d\xi, \text{ donc } \left|x^2 r(x)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix\xi}}{i^2}\rho''(\xi)\,d\xi\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{+2}\left|\rho''(\xi)\right|d\xi \leq \frac{2}{\pi}\|\rho''\|_{L^\infty([-2,2])}.\text{CQFD}$$

On conclut alors que $r(x) = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $\pm\infty$, donc r est intégrable en $\pm\infty$ par comparaison aux intégrales de référence de Riemann (ici $\alpha = 2 > 1$). Enfin r est bornée sur $\mathbb{R}$ car par exemple elle est continue sur $\mathbb{R}$ et de limites nulles en $\pm\infty$.

33. Selon l'injectivité de la transformée de Fourier admise, il suffit de montrer que f et $\lambda f * r_\lambda$ ont la même transformée de Fourier. en effet il est admis que $f * r_\lambda$ intégrable, donc $\widehat{f * r_\lambda}$ existe et on a selon Q.21 (f et r_λ dans L^1, avec r_λ bornée et $f * r_\lambda$ dans L^1)

$$\lambda\widehat{f * r_\lambda}(x) = \lambda\widehat{f}(x)\times\widehat{r_\lambda}(x) = \widehat{f}(x)\times\widehat{r}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{(Q.22)}$$

et selon le résultat admis sur l'inverse de Fourier, on aura :

$$\lambda \widehat{f * r_\lambda}(x) = \widehat{f}(x) \times \widehat{r}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \widehat{f}(x) \times \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \widehat{f}(x)$$

En effet les deux dernières fonctions coïncident sur $[-\lambda, \lambda]$ car $\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) = 1$ sur cet intervalle, et en dehors de $[-\lambda, \lambda]$, $\widehat{f}$ est nulle. CQFD.

34. On a $f(x) = \lambda f * r_\lambda(x)$, puisque r_λ de classe C^1, avec r_λ et r'_λ intégrables et bornées, alors $f * r_\lambda$ est dérivable (Q.25) et on a:

$$f'(x) = \lambda (f * r_\lambda)'(x) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, r'(\lambda t)\, \lambda dt = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \tfrac{u}{\lambda}\right) r'(u)\, du$$

donc, puisque r' est intégrable (résultat admis de l'énoncé) :

$$|f'(x)| = \left| \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \tfrac{u}{\lambda}\right) r'(u)\, du \right| \leq \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f\left(x - \tfrac{u}{\lambda}\right) r'(u) \right| du \leq \frac{\lambda}{2\pi} \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |r'(u)|\, du = \lambda C \|f\|_\infty .$$

Fin du corrigé