GROUPE CONCOURS POLYTECHNIQUES

EPREUVE COMMUNE AUX CONCOURS PH-M, PH-P, CH-P, CH-P'

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Présentation du problème.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ; le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté x.y et l'on pose $\|x\| = \sqrt{x.x}$. Soient G le groupe des endomorphismes orthogonaux de E, et S l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques de E ; on rappelle que S est l'ensemble des endomorphismes diagonalisables dans une base orthonormée de E. Soit S^+ le sous-ensemble des endomorphismes symétriques de E dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. L'application identique de E est notée i.

Ce problème se compose de 4 parties qu'il faut traiter dans l'ordre indiqué ; à chaque étape, les résultats indispensables pour poursuivre sa résolution sont explicitement énoncés. La partie A a pour but de définir une application exponentielle de S dans S^+ et d'en établir quelques propriétés. La partie B contient le résultat essentiel du problème : tout endomorphisme bijectif f de E est d'une façon unique le produit $g \exp s$ d'un élément g de G et de l'exponentielle d'un élément s de S.

Dans la partie C on introduit une certaine forme quadratique Q de signe variable et l'on considère le groupe H des endomorphismes f de E tels que Q(f(x)) = Q(x) pour tout x dans E ; le résultat essentiel de cette partie C est que les facteurs g et $\exp s$ mentionnés ci-dessus sont dans H chaque fois que f est dans H. Dans la partie D on utilise ces faits pour définir deux homomorphismes non triviaux Δ' et Δ'' du groupe H dans le groupe $\{1,-1\}$, tels que $\Delta'(f)\Delta''(f)$ soit le déterminant de f pour tout f dans H.

On vous recommande de ne recopier aucune partie de l'énoncé, même de façon abrégée, car c'est du temps perdu pour vous et pour les correcteurs ; il vous suffit d'indiquer très lisiblement les numéros des questions tels qu'ils sont écrits dans l'énoncé ; par exemple, pour la partie A, vous recopierez les numéros A1, A2a, A2b, A3, A4a, A4b et A5.

On vous déconseille de laisser des espaces libres lorsque vous ne trouvez pas une réponse à une question, pour pouvoir y écrire éventuellement la réponse plus tard ; mieux vaut laisser une seule ligne blanche, pour y signaler éventuellement que la réponse se trouve plus loin.

A) Exponentielle d'un endomorphisme symétrique.

Si s est un endomorphisme (pour le moment quelconque) de E, et si $B = (e_1, \ldots\ldots, e_n)$ est une base de E, on note s_B la matrice de s dans B, et $\|s\|_B$ le maximum des valeurs absolues des n^2 éléments de s_B ; on sait que les éléments de s_B représentent les composantes de s dans une certaine base de l'espace vectoriel L(E) des endomorphismes de E ; par conséquent, l'application $s \mapsto \|s\|_B$ est une norme sur l'espace vectoriel L(E). On associe à s la suite des endomorphismes

$$u_k = i + s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{s^k}{k!},$$

c'est-à-dire $u_k = P_k(s)$, avec des polynômes P_k dont la définition est évidente ; si cette suite (u_k) converge pour la norme définie ci-dessus, sa limite u est notée $\exp s$. En fait l'existence et la valeur de cette limite sont indépendantes du choix de la base B ; cela résulte de l'équivalence de toutes les normes sur L(E), ou encore de la formule de changement de base pour les matrices d'endomorphismes.

On se contentera ici d'étudier des cas où s est diagonalisable, en profitant des simplifications qu'apporte cette hypothèse.

A1) Démontrez l'existence de $\exp s$ lorsque s est diagonalisable ; pour cela vous utiliserez une base B de E judicieusement choisie. Trouvez une relation simple entre la trace de s et le déterminant de $\exp s$.

A2) Supposant toujours s diagonalisable, on s'intéresse à l'application qui à tout nombre réel t associe exp(ts).

A2a) Démontrez que c'est un homomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ dans le groupe multiplicatif des endomorphismes bijectifs de E, c'est-à-dire :
$\exp(\alpha+\beta)s = \exp(\alpha s).\exp(\beta s)$, quels que soient α et β dans R.

A2b) Démontrez que c'est une application continue de $\mathbb{R}$ dans L(E).

A3) Soit s un endomorphisme de E diagonalisable dans la base $B = (e_1,\dots,e_n)$ et soit f un endomorphisme inversible de E ; on pose $s' = fsf^{-1}$ et $B' = (f(e_1), f(e_2),\dots, f(e_n))$. Comparez s_B et $s'_{B'}$, matrices de s et s' dans les bases B et B' respectivement, et déduisez-en que $\exp(fsf^{-1}) = f(\exp s)f^{-1}$.

A4) Dans les deux questions suivantes A4a et A4b, s est toujours diagonalisable, et l'on suppose connus ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ (nombres réels distincts) et les sous-espaces propres associés $E_1, E_2, \dots E_r$.

A4a) Est-il toujours vrai que tout vecteur propre de s^2 est aussi vecteur propre de s ? Si s^2 est diagonalisable dans une certaine base de E, s est-il nécessairement diagonalisable dans cette même base ?

A4b) Est-il toujours vrai que tout vecteur propre de exps est aussi vecteur propre de s ? Si exps est diagonalisable dans une certaine base de E, s est-il nécessairement diagonalisable dans cette même base ?

A5) Démontrez que l'application $s \mapsto \exp s$ détermine une bijection de S sur S^+. Si u est dans S^+, vous pourrez noter $\log u$ son image réciproque dans S (même si en dehors de S il existe d'autres images réciproques non diagonalisables).

B) Factorisation des endomorphismes inversibles.

B1) On rapporte E à une base orthonormée B ; si f est un endomorphisme de E, on note f* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est la transposée de f_B , matrice de f.

B1a) Démontrez que, quels que soient x et y dans E, on a l'égalité de produits scalaires $x.f(y) = f^*(x).y$.
Vous devez démontrer cette égalité même si elle figure dans votre cours de mathématiques.

B1b) Quels sont les endomorphismes g tels que $g^*g = i$?

B2) Soit s dans S ; on lui associe la forme quadratique Q_S telle que $Q_S(x) = s(x).x$ pour tout x dans E. Démontrez que s est dans S^+ si et seulement si Q_S est définie positive.

B3) Démontrez que f*f est dans S^+ chaque fois que f est un endomorphisme inversible de E.

B4) Soit toujours f un endomorphisme inversible de E.

B4a) On suppose que f est égal à un produit $g \exp s$, avec g dans G et s dans S ; démontrez que $\exp(2s) = f^*f$.

B4b) Démontrez qu'il existe un unique couple (g,s) dans $G\times S$ tel que $f = g \exp s$.

B5) Soit f un endomorphisme de E tel que $\|f(x)\| \geq \|x\|$ pour tout x dans E ; démontrez que la valeur absolue du déterminant de f est supérieure ou égale à 1.

C) Le groupe H.

Soit r un entier tel que $0 < r < n$, soit E' un sous-espace vectoriel de E de dimension r, et soit E" le sous-espace orthogonal de E' ; pour tout x dans E, on note x' et x" ses projections orthogonales dans E' et E". Soit j la symétrie orthogonale par rapport à E', c'est-à-dire $j(x) = x' - x''$, et soit Q la forme quadratique sur E définie ainsi :

$$Q(x) = \|x'\|^2 - \|x''\|^2 \ ;$$

on s'intéresse à l'ensemble H des endomorphismes f de E tels que $Q(f(x)) = Q(x)$ pour tout x dans E.

C1) Vérifiez que $Q(x) = j(x).x$ pour tout x, c'est-à-dire $Q = Q_j$ selon les notations introduites en B2.

C2) Démontrez les trois assertions suivantes :

C2a) H est l'ensemble des endomorphismes f tels que $f^*jf = j$.

C2b) Tout élément de H a pour déterminant 1 ou -1.

C2c) H est un sous-groupe du groupe des endomorphismes inversibles de E.

C3) On va chercher l'intersection des groupes G et H.

C3a) Quels sont les vecteurs x tels que $Q(x) = \|x\|^2$? Et ceux tels que $Q(x) = -\|x\|^2$?

C3b) Démontrez qu'un élément g de G est dans H si et seulement si $g(E') = E'$ et $g(E'') = E''$.

C4) Soit s dans S ; il s'agit de démontrer que $\exp s$ est dans H si et seulement si $s(E') \subset E''$ et $s(E'') \subset E'$. Pour cela, après avoir posé $u = \exp s$, vous démontrerez l'équivalence des 4 assertions suivantes :

(a) u est dans H .

(b) $juj = u^{-1}$.

(c) $jsj = -s$.

(d) $s(E') \subset E''$ et $s(E'') \subset E'$.

C5) Soit f dans H, factorisé sous la forme $g \exp s$, avec g dans G et s dans S ; démontrez que f^*, $\exp s$ et g sont aussi dans H.

C6) Vous pouvez maintenant, ou bien passer directement à la partie D, ou bien traiter C6, qui prolonge C4 dans le cas où r = 1. Soit e_1 un vecteur normé qui engendre E' (dont la dimension est 1), et soit s un élément de S tel que $\exp s$ soit dans H ; démontrez qu'il existe une base orthonormée $(e_2,\ldots,e_n)$ de E" telle que la matrice de s dans $B = (e_1,e_2,\ldots,e_n)$ soit de la forme $s_B = t\,\sigma$, où t est un nombre réel, et

$$\sigma = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right]$$

Calculez les matrices de s^2 et $\exp s$ dans la base B.

D) Les homomorphismes Δ' et Δ'' .

Si f est un endomorphisme de E, on note f' (resp. f") l'endomorphisme de E' (resp. E") qui à tout x dans E' (resp. E") associe la projection orthogonale de f(x) dans E' (resp. E").

D1) Soit f dans H ; démontrez que $\|f'(x)\| \geq \|x\|$ pour tout x dans E', et $\|f''(x)\| \geq \|x\|$ pour tout x dans E". D'après B5, il en résulte que $|\det f'| \geq 1$ et $|\det f''| \geq 1$. On pose

$$\Delta'(f) = \mathrm{sgn}(\det f') \quad \text{et} \quad \Delta''(f) = \mathrm{sgn}(\det f'') \,;$$

autrement dit, $\Delta'(f)$ (resp. $\Delta''(f)$) vaut 1 ou -1 selon que le déterminant de f' (resp. f") est positif ou négatif. Enfin, on rappelle que $\det f = \pm 1$ (d'après C2b).

D2) Soit φ une application continue de $\mathbb{R}$ (corps des nombres réels) dans L(E) telle que $\varphi(t)$ soit dans H pour tout t dans $\mathbb{R}$. Démontrez que les applications qui à tout t associent $\Delta'(\varphi(t))$, $\Delta''(\varphi(t))$ et $\det\varphi(t)$, sont constantes.

D3) Vous savez que les éléments f de H sont les produits $g \exp s$, où g est un élément de G tel que g(E') = E' et g(E") = E", et s un élément de S tel que $s(E')\subset E''$ et $s(E'')\subset E'$. Démontrez d'une part que $\Delta'(f)$ et $\Delta''(f)$ sont les déterminants des restrictions g' et g" de g à E' et à E", et d'autre part que $\Delta'(f)\,\Delta''(f) = \det f$.
Suggestion : utilisez $\varphi(t) = g \exp(ts)$.

D4) Soient f_1 et f_2 dans H ; démontrez que $\Delta'(f_1f_2) = \Delta'(f_1)\Delta'(f_2)$ et $\Delta''(f_1f_2) = \Delta''(f_1)\Delta''(f_2)$.
Suggestion : utilisez deux applications φ_1 et φ_2 analogues à la précédente.

D5) L'application $\Delta'\times\Delta''$ qui à tout élément f dans H associe $(\Delta'(f), \Delta''(f))$, est-elle surjective sur les 4 éléments (1, 1), (1, -1), (-1,1) et (-1, -1) ?