CONCOURS COMMUN MINES.PONTS 1978

OPTIONS M ET P' - EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 2 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte 2 pages.

N.B.-Dans la question du problème comportant la recherche de résultats numériques, le candidat expliquera la marche suivie pour conduire les calculs, en donnant les justifications nécessaires et indiquera, s'il y a lieu, le titre et l'auteur des tables de valeurs numériques utilisées.
-La notation Log désigne le logarithme népérien.

---

x étant une variable réelle, strictement positive, on considère les fonctions ϕ et f définies sur $]0,+\infty[$ par les relations :

$$\phi(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \quad , \quad f(x) = x\,e^{-x}\,\phi(x) .$$

1°) Démontrer la relation $\phi(x) - \operatorname{Log} x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n - 1}{(n!)n}$

dont le second membre représente la somme d'une série convergente pour toute valeur de x.

Démontrer que $\phi(x)$ est équivalent à $\operatorname{Log} x$ lorsque x tend vers zéro.

2°) La fonction f admet une dérivée première, notée f'. Calculer $f'(x)$ et démontrer la relation

$$(1) \quad (x-1)\,f(x) + x\,f'(x) = x .$$

Montrer que le signe de $f'(x)$ peut s'obtenir à l'aide du signe de la fonction g, définie, pour $x > 0$ et $x \neq 1$, par la relation : $g(x) = \phi(x) - \frac{e^x}{x-1}$.

Etudier les variations et le signe de $g(x)$, puis le signe de $f'(x)$. Cette étude fait apparaître que $f'(x)$ s'annule pour deux valeurs de x, notées x_1 et x_2, telles que $0 < x_1 < 1 < x_2$.

3°) Etudier les variations de $f(x)$, ainsi que le signe de la différence $[f(x) - (x-1)]$, et, à partir de la relation (1), le signe de la différence $[f(x) - \frac{x}{x-1}]$.

Les résultats de ces études seront rassemblés dans un même tableau.

A titre d'indication, il peut être commode d'utiliser la relation (1) pour la recherche des limites de $f(x)$ et de $f'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4°) Dans un plan rapporté à un repère orthonormé (axes $\vec{ox},\vec{oy}$; unité de longueur : quatre centimètres), faire, à partir des résultats précédents, un tracé de la courbe (C) ayant pour équation $y = f(x)$, en situant cette courbe par rapport à la droite (D) et par rapport à l'hyperbole (H) ayant pour équations, respectivement :

$$y = x - 1 \quad \text{et} \quad (x-1)\,(y-1) = 1 .$$

Ce tracé permet-il d'avoir quelques indications numériques sur les nombres x_1, $f(x_1)$, x_2, $f(x_2)$?

.../...

5°) Pour préciser ce tracé, on propose (à titre d'exemple) de rechercher une valeur approchée du nombre f(3) à partir des relations :

$$\phi(3) = \mathrm{Log}3 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \quad \text{où} \quad u_n = \frac{3^n - 1}{(n!)n} \quad , \quad f(3) = 3\,e^{-3}\,\phi(3) \; .$$

On calculera d'abord une valeur décimale approchée de chacun des dix premiers termes u_1, u_2, ... u_9, u_{10} de la série, avec une erreur inférieure à 10^{-5}. On en déduira des valeurs approchées de $\phi(3)$ et $f(3)$, en précisant l'approximation obtenue.

Ce résultat permet-il de placer le nombre x_2 par rapport au nombre 3 ?

oooooo
oooooo