

Épreuve : MATHÉMATIQUES II

Option M, P'

L'objet de ce problème est l'étude de l'intersection Γ de deux cônes de révolution C_1 et C_2 dont les axes sont parallèles et distincts.

\mathcal{E} désigne un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormal $R = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ définissant des coordonnées cartésiennes x, y, z . Les axes de coordonnées $(O; \vec{i})$, $(O; \vec{j})$, $(O; \vec{k})$ et les plans de coordonnées $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $(O; \vec{i}, \vec{k})$, $(O; \vec{j}, \vec{k})$ seront notés respectivement Ox , Oy , Oz et xOy , xOz , yOz . Une droite parallèle à Oz est dite verticale, un plan parallèle à xOy est dit horizontal.

Dans tout le problème, on considère deux cônes de révolution C_1 et C_2 , de sommets respectifs S_1 et S_2 . On appelle demi-angle au sommet d'un tel cône l'angle α des génératrices avec l'axe ; on supposera $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Les projections sont toutes des projections orthogonales.

Partie I - Préliminaires

I.A - Montrer qu'un cône de révolution de sommet O , d'axe Oz , admet dans le repère R une équation cartésienne de la forme : $x^2 + y^2 = m^2 z^2$, dans laquelle m est un réel strictement positif. Interpréter géométriquement la valeur de m .

I.B - En déduire qu'on peut choisir R de telle sorte que C_1 et C_2 y admettent respectivement pour équation cartésienne :

$$(x - a)^2 + y^2 = m_1^2 (z - h)^2$$

$$\text{et } (x + a)^2 + y^2 = m_2^2 (z + h)^2,$$

les réels a , h , m_1 et m_2 vérifiant les conditions :

$$a > 0, h \geq 0, m_1 > 0, m_2 > 0.$$

Un tel choix de R vaut pour la suite du problème.

Partie II - Étude de la projection γ de Γ sur le plan xOz

II.A - Montrer que γ est contenue dans une courbe simple Π dont on écrira une équation cartésienne. Inversement, quelle condition doit vérifier un point de Π pour appartenir à γ ? En donner une interprétation géométrique.

II.B - On suppose que C_1 et C_2 ont même demi-angle au sommet et on pose $m = m_1 = m_2$.

II.B.1) Qu'obtient-on pour Π ?

II.B.2) Faire une figure représentant l'intersection des cônes C_1 et C_2 avec le plan xOz , ainsi que γ . On envisagera plusieurs cas.

II.B.3) En déduire la nature de Γ .

II.C - On suppose que les demi-angles au sommet de C_1 et de C_2 ne sont pas égaux.

II.C.1) Quelle est la nature de Π ? Donner une équation de son axe.

II.C.2) On choisit

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et } m_2 = 1.$$

Faire une figure représentant l'intersection des cônes C_1 et C_2 avec le plan xOz , ainsi que la courbe γ , en supposant successivement $h = a$ et $h = 2a$.

Partie III - Étude de la projection γ' de Γ sur le plan xOy

III.A - Une définition géométrique de γ' .

On appelle respectivement F_1 et F_2 les projections sur xOy des axes de C_1 et de C_2 , P la projection sur xOy d'un point M de Γ .

III.A.1) Montrer que P vérifie une relation de la forme :

$$\left| \frac{PF_2}{m_2} \pm \frac{PF_1}{m_1} \right| = 2h.$$

III.A.2) Montrer réciproquement que tout point de xOy vérifiant la relation précédente appartient à γ' .

III.B - Quelle est la nature de γ' lorsque $h = 0$?

III.C - On suppose que h est différent de 0 et que les cônes C_1 et C_2 ont même demi-angle au sommet. Quelle est la nature de γ' ?

III.D - On se place dans le cas général $m_1 \neq m_2$ et $h \neq 0$. On désigne par ρ et θ des coordonnées polaires définies en choisissant, dans le plan xOy orienté par

$$(\vec{i}, \vec{j}) = +\frac{\pi}{2},$$

F_1 pour pôle et $(F_1; \vec{i})$ pour axe polaire.

III.D.1) Montrer que ρ et θ vérifient une relation de la forme $f(\rho, \theta) = 0$ que l'on explicitera.

III.D.2) On prend

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et } m_2 = 1.$$

Construire γ' en supposant successivement $h = a$ et $h = 2a$. Dans chacun de ces deux cas on commencera par exprimer ρ en fonction de θ .

Partie IV - Étude de Γ dans le cas $m_1 \neq m_2$

On considère dans cette partie la famille des surfaces Σ_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$, dont une équation cartésienne dans R est :

$$(x+a)^2 + y^2 - m_2^2(z+h)^2 + \lambda[(x-a)^2 + y^2 - m_1^2(z-h)^2] = 0$$

IV.A - Vérifier que, pour tout réel λ , Γ est contenue dans Σ_λ .

IV.B - Montrer que Γ est contenue dans une sphère.

IV.C - Dans cette question, on suppose $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq -\frac{m_2^2}{m_1^2}$.

Réduire l'équation de Σ_λ en effectuant une translation de l'origine des coordonnées. En déduire que Γ est en général contenue dans un troisième cône de révolution.

IV.D - Préciser la nature de Σ_λ selon les valeurs de λ . On pourra se limiter au cas où

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, m_2 = 1, h = 2a.$$

••• FIN •••
