

Corrigé ENS Lyon-Cachan 2003

Première partie

On rappelle pour la suite les résultats élémentaires suivants :

- Si M et N sont deux matrices rectangulaires de formats compatibles, le rang de MN est inférieur ou égal aux rangs de M et de N .
 - Le rang d'une matrice ne change pas si on la multiplie (à gauche ou à droite) par une matrice inversible.
 - Le rang de la transposée d'une matrice est égal au rang de la matrice.
1. D'après les remarques préliminaires, si P et Q appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\text{rg } PAQ = \text{rg } A$ et $\text{rg } {}^tQ {}^tA {}^tP = \text{rg } A$, donc $(f \in G \cup G' \text{ et } \text{rg } A = 1) \Rightarrow \text{rg } f(A) = 1$.
 2. Si u est un endomorphisme de rang 1, de matrice A dans la base $B = (e_1, \dots, e_n)$, son image est une droite, dirigée par un certain vecteur e non nul. En appelant X le vecteur colonne représentant e dans B , en posant $u(e_j) = b_j e$ et V le vecteur ligne $(b_1, \dots, b_n)$, on en déduit que $A = CV$.
 3. (a) Soit $\mathcal{P}$ le plan vectoriel engendré par $({}^tV, {}^tV')$ dans $\mathcal{C}$. Soit e unitaire dans $\mathcal{P}$ orthogonal à ${}^tV'$. On choisit alors $Y = \frac{e}{Ve}$ ($Ve \neq 0$ car e n'est pas orthogonal à ${}^tV'$) pour avoir $VY = 1$ et $V'Y = 0$. La méthode est analogue pour construire Y' .
 (b) $(XV + X'V')Y = X$ et $(XV + X'V')Y' = X'$ donc X et X' appartiennent à l'image de $XV + X'V'$ qui est de rang 1, donc X et X' sont liés.
 4. Si F n'est inclus ni dans F_1 ni dans F_2 , il existe un vecteur x_1 appartenant à $F \setminus F_1$, donc à $F_2 \setminus F_1$ et un vecteur x_2 appartenant à $F \setminus F_2$, donc à $F_1 \setminus F_2$. Mais alors $x_1 + x_2 \in F$, donc par exemple $x_1 + x_2 \in F_1$, or $x_2 \in F_1$, donc $x_1 \in F_1$: contradiction (idem si $x_1 + x_2 \in F_2$).
 5. (a) XV est de rang ≤ 1 car l'image de l'endomorphisme associé est incluse dans la droite $\mathbb{C}X$.
 L'application $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \rightarrow & \mathcal{M} \\ V & \mapsto & XV \end{array}$ est linéaire, injective, d'image $X\mathcal{L}$, lequel est donc un s.e.v de $\mathcal{M}$ de dimension n . Idem concernant CV .
 (b) On considère une base de F de la forme $(X_i V_i)_{1 \leq i \leq n}$. Soit $I = \{i \in [1, n] / (V_1, V_i) \text{ libre}\}$. Si $i \in I$, $X_1 V_1 + X_i V_i \in F$, donc d'après 3, X_1 et X_i sont liés, et si $i \notin I$, V_1 et V_i sont liés. Par conséquent, la famille $(X_i V_i)_{i \notin I} \cup (X_1 V_i)_{i \in I}$ est une base de F , i.e $F \subset X_1 \mathcal{L} \cup CV_1$. D'après 4, F est inclus dans l'un des deux et étant tous deux de dimension n d'après 5a, ils sont égaux.
 (c) Si X et X' sont liés, $X\mathcal{L} = X'\mathcal{L} = X\mathcal{L} \cap X'\mathcal{L}$.
 Sinon, soit $A \in X\mathcal{L} \cap X'\mathcal{L} : A = XY = X'Y'$, d'où $XY - X'Y' = 0$ donc par 3, Y et Y' sont colinéaires donc $\exists a \in \mathbb{C}, Y' = aY$, d'où $(X - aX')Y = 0$, or (X, X') libre, donc $Y = 0$, d'où $X\mathcal{L} \cap X'\mathcal{L} = \{0\}$.
 De même, si V et V' sont liés, $CV = CV'$, sinon $CV \cap CV' = \{0\}$.
 Soit $A \in X\mathcal{L} \cap CV, A \neq 0 : A = XY = UV$, avec Y et U non nulles. $A \in X\mathcal{L} \cap U\mathcal{L}$, donc par ce qui précède, $\exists a \neq 0, U = aX$, i.e $X(Y - aV) = 0$, i.e $Y = aV$, d'où $A \in \mathbb{C}XV$. La réciproque étant évidente, $X\mathcal{L} \cap CV = \mathbb{C}XV$.
 6. Soit F un tel sous-espace. D'après 5b, on peut supposer que $F = X\mathcal{L}$, avec $X \neq 0$ (la méthode sera analogue si $F = CV$). Soit $(XL_1, \dots, XL_n)$ une base de F . $f(F)$ est un s.e.v de $\mathcal{M}$ de dimension $\leq n$ formé de matrices de rang ≤ 1 , donc est inclus dans un $Y\mathcal{L}$ ou un CV . Plaçons-nous dans le premier cas et posons $f(XL_i) = YL'_i$. Si la famille $(YL'_1, \dots, YL'_n)$ est liée, il existe n scalaires non tous nuls (a_k) tels que $\sum a_k YL'_k = 0$, soit $f(X \sum a_k L_k) = 0$. Si $X \sum a_k L_k$ était de rang 1, son

image aussi, ce qui n'est pas le cas, donc cette matrice est nulle, ce qui contredit que $(XL_1, \dots, XL_n)$ est une base de F , donc $(YL'_1, \dots, YL'_n)$ est une base de $f(F)$, i.e $f(F) = Y\mathcal{L}$. On procède de même si $f(F) \subset CV$.

7. (a) Soit $(L_1, \dots, L_n)$ la base canonique de $\mathcal{L}$, et $Y_1 L'_j = f(X_1 L_j)$. Supposons $\sum a_k L'_k = 0$. Alors $f(X_1 \sum a_k L_k) = 0$, or $f(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$ et $X_1 \sum a_k L_k$ est de rang ≤ 1 , donc elle est nulle, d'où $\sum a_k L_k = 0$, et tous les a_k sont nuls. Finalement, $(L'_1, \dots, L'_n)$ est une base de $\mathcal{L}$. Il existe donc $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall k \in [1, n]$, ${}^t L'_k = {}^t Q {}^t L_k$, i.e $L'_k = L_k Q$, d'où par linéarité, $f(X_1 V) = Y_1 V Q$ pour tout $V \in \mathcal{L}$.
 - (b) Si $f(X_1 \mathcal{L}) = f(X_2 \mathcal{L})$ alors $Y_1 \mathcal{L} = Y_2 \mathcal{L}$, et d'après 5c, Y_1 et Y_2 sont colinéaires, donc $\exists a \neq 0$, $Y_2 = aY_1$. D'après 7a, il existe Q et Q' dans $GL_n(\mathbb{C})$ tels que $\forall V \in \mathcal{L}$, $f(X_1 V) = Y_1 V Q$ et $f(X_2 V) = aY_1 V Q'$. Soit λ une valeur propre de la matrice ${}^t Q^{-1} {}^t Q'$ et ${}^t V$ un vecteur propre (non nul) associé : ${}^t Q^{-1} {}^t Q' {}^t V = \lambda {}^t V$ d'où $V Q' = \lambda V Q$, d'où $f((X_2 - a\lambda X_1)V) = a\lambda Y_1 V Q - a\lambda Y_1 V Q = 0$. Or $(X_2 - a\lambda X_1)V$ est de rang ≤ 1 , donc $(X_2 - a\lambda X_1)V = 0$, d'où $X_2 = a\lambda X_1$: contradiction.
 - (c) D'après 6, $f(CV)$ est du type $Y\mathcal{L}$ ou CU . Supposons $f(CV) = Y\mathcal{L}$. $CV \cap X_1 \mathcal{L} = \mathbb{C}X_1 V$, donc $\mathbb{C}f(X_1 V) = f(CV \cap X_1 \mathcal{L}) \subset f(CV) \cap f(X_1 \mathcal{L}) = Y\mathcal{L} \cap Y_1 \mathcal{L}$. D'après 5c, cela impose que Y_1 et Y sont colinéaires. Par le même raisonnement, on montre que Y_2 et Y sont colinéaires, donc $Y_1 \mathcal{L} = Y_2 \mathcal{L}$, soit $f(X_1 \mathcal{L}) = f(X_2 \mathcal{L})$, en contradiction avec la question 7b.
 - (d) $f(X\mathcal{L})$ est du type $Y\mathcal{L}$ ou CU . Supposons $f(X\mathcal{L}) = CU$. Soit V un vecteur ligne non colinéaire à U . $f(\mathbb{C}XV) = f(X\mathcal{L} \cap CV) \subset f(X\mathcal{L}) \cap f(CV) = CU \cap CV = \{0\}$. Ceci est impossible car les éléments non nuls de $\mathbb{C}XV$ sont de rang 1 donc ceux de $f(\mathbb{C}XV)$ également.
 - (e) Soit $X \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$. D'après d, il existe $Z \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ tel que $f(X\mathcal{L}) = Z\mathcal{L}$, et d'après a, il existe $Q' \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall V \in \mathcal{L}$, $f(XV) = ZVQ'$. Posons avec 7c $f(CV) = CU$. $f(X_1 V)$ et $f(XV)$ appartiennent à $f(CV)$, donc il existe L_1 et L tels que $Y_1 V Q = f(X_1 V) = L_1 U$ et $ZVQ' = f(XV) = LU$. Les deux matrices $Y_1 V Q$ et ZVQ' s'annulent sur le même hyperplan $(\text{Ker } U)^\perp$, donc les vecteurs lignes VQ et VQ' sont colinéaires, d'où en transposant ${}^t Q'^{-1} {}^t Q {}^t V$ est colinéaire à ${}^t V$, ceci pour tout vecteur colonne ${}^t V$. Ceci implique classiquement que $\exists \lambda \neq 0$, ${}^t Q'^{-1} {}^t Q = \lambda I_n$, d'où $Q = \lambda Q'$. Par conséquent, $f(XV) = \frac{Z}{\lambda} VQ = YVQ$ en posant $Y = \frac{Z}{\lambda}$.
 - (f) Soit $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{C}$. Pour chaque indice i , il existe $Y_i \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ tel que $\forall V \in \mathcal{L}$, $f(E_i V) = Y_i V Q$. Soit P l'élément de $\mathcal{M}$ tel que pour tout i , $PE_i = Y_i$. Ainsi, $\forall V$, $f(E_i V) = PE_i V Q$. Par linéarité, on en déduit que $\forall X \in \mathcal{C}, \forall V \in \mathcal{L}$, $f(XV) = PXVQ$. Si P n'est pas inversible, il existe X non nul tel que $PX = 0$ d'où $f(XV) = 0$, ce qui est impossible car $\text{rg } XV = 1$. Soit $A \in \mathcal{M}$. On décompose A en $\sum_{i=1}^n X_i V_i$, où $X_i V_i$ est la matrice de rang ≤ 1 dont la i ème colonne est celle de A et les autres sont nulles. $f(A) = \sum_i f(X_i V_i) = \sum_i P X_i V_i Q = PAQ$. Ceci prouve que $f \in G$.
8. Supposons maintenant qu'il existe $X_1, X_2 \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$, non colinéaires, tels que $f(X_1 \mathcal{L}) = CV_1$ et $f(X_2 \mathcal{L}) = CV_2$. Alors $(T \circ f)(X_1 \mathcal{L}) = {}^t V_1 \mathcal{L}$ et $(T \circ f)(X_2 \mathcal{L}) = {}^t V_2 \mathcal{L}$. On en déduit par 7 que $T \circ f \in G$, soit $f \in G'$. Si $f(X_1 \mathcal{L}) = Y_1 \mathcal{L}$ et $f(X_2 \mathcal{L}) = CV_2$ avec X_1 et X_2 indépendants, on utilise $X_1 + X_2$ (indépendant de X_1 et de X_2) pour se ramener à l'un des deux cas précédents. Si $n = 1$, la question est sans intérêt.

Deuxième partie

1. Le produit de 2 matrices inversibles est inversible et la transposée d'une matrice inversible est inversible, donc $f \in \mathcal{G}$ et $A \in GL_n(\mathbb{C}) \implies f(A) \in GL_n(\mathbb{C})$.
2. (a) • Soit $A_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $I_n - \lambda A_r$ est triangulaire supérieure avec une diagonale de 1 donc est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

- Si A est de rang $r \leq n-1$, alors A et A_r ont même rang donc il existe P et Q dans $GL_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PA_rQ$, d'où $PQ - \lambda A = P(I_n - \lambda A_r)Q \in GL_n(\mathbb{C})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
- (b) • Soit $B_r \in \mathcal{M}$ diagonale à coefficients diagonaux $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{r}, 0, \dots, 0$. $I_n - \lambda B_r$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \{1, \dots, r\}$
- Si A est de rang $r \leq n-1$, il existe comme plus haut P et Q dans $GL_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PB_rQ$, donc $PQ - \lambda A = P(I - \lambda B_r)Q$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \{1, \dots, r\}$.
- 3. (a) A est de rang $r \leq n-1$. D'après 2a, $\exists M \in \mathcal{M}, \forall \lambda \in \mathbb{C}, M - \lambda A \in GL_n(\mathbb{C})$, donc $f(M) - \lambda f(A) \in GL_n(\mathbb{C})$. Si $f(A)$ est inversible, alors $\forall \lambda \in \mathbb{C}, f(A)^{-1}f(M) - \lambda I_n$ est inversible, ce qui est faux en prenant pour λ une valeur propre complexe de $f(A)^{-1}f(M)$.
- (b) • Si $\text{rg } A = n$, alors $\text{rg } f(A) = n$ par hypothèse.
- Sinon, on pose $r = \text{rg } A$ et on applique 2b. Il existe N inversible telle que $N - \lambda A$ est inversible sauf pour exactement r valeurs de λ . Or M inversible équivaut à $f(M)$ inversible, d'où $f(N) - \lambda f(A)$ est non inversible pour r valeurs de λ , or $f(N)$ est inversible, donc en mettant $\lambda f(N)$ en facteur, $\lambda^{-1}I_n - f(N)^{-1}f(A)$ vérifie la même propriété. Le polynôme caractéristique de $f(N)^{-1}f(A)$ admettra r racines distinctes non nulles, et 0 est aussi racine, il s'écrit donc $X^{\alpha_0} \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$. Ce polynôme est de degré n , donc $\alpha_0 \leq n-r$. Or $\dim \text{Ker } (f(N)^{-1}f(A)) \leq \alpha_0$, d'où $\text{rg } f(A) = \text{rg } f(N)^{-1}f(A) \geq n - \alpha_0 \geq r$.
- (c) $f(A) = 0 \Rightarrow A = 0$ d'après 3b, ce qui prouve l'injectivité de f , donc sa bijectivité. $f(GL_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$ d'après 3a, donc f^{-1} vérifie la même propriété que f . En lui appliquant 3b, il vient $\forall B, \text{rg } f^{-1}(B) \geq \text{rg } B$, en l'appliquant à $B = f(A)$, on conclut que f préserve le rang.
- (d) Si $f(GL_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C})$, alors f préserve le rang, donc $f(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$, donc $f \in \mathcal{G}$ par la partie 1. La question 1 assure l'équivalence cherchée.

Troisième partie

1. $(u^* \circ u)^* = u^* \circ u$. $\forall x, ((u^* \circ u)(x), x) = \|u(x)\|^2 \geq 0$. On en déduit que $\text{Ker } (u^* \circ u) = \text{Ker } u$, donc $u^* \circ u$ est hermitien positif de même rang que u .
 $I_E = (u^* + \bar{\lambda}v^*) \circ (u + \lambda v) = u^* \circ u + \lambda u^* \circ v + \bar{\lambda}v^* \circ u + v^* \circ v$. En prenant pour λ les valeurs 1 et -1 et en ajoutant, on obtient $u^* \circ u + v^* \circ v = I_E$, d'où $\lambda u^* \circ v + \bar{\lambda}v^* \circ u = 0$. On choisit alors $\lambda = 1$ puis $\lambda = i$, ce qui donne en ajoutant $u^* \circ v = 0$.
2. (a) Soit $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{p-1} u_{p-1}$. $u + \lambda u_p$ est unitaire pour tout complexe λ de module 1, donc par 1a, $(\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i u_i)^* \circ u_p = 0$ et (2) $(\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i u_i)^* \circ (\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i u_i) + u_p^* \circ u_p = I_E$.
 En prenant $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) = (1, 1, \dots, 1)$ puis $(1, -1, \dots, -1)$ et en ajoutant, on obtient $u_1^* \circ u_p = 0$. Les indices jouant le même rôle, il en résulte que pour tous i, j distincts, $u_i^* \circ u_j = 0$. En remplaçant dans (2), on en déduit que $\sum_{i=1}^p u_i^* \circ u_i = I_E$.
- (b) Pour tous vecteurs x et y et pour tous indices i et j distincts, $(u_j(x), u_i(y)) = (u_i^* \circ u_j(x), y) = 0$ donc $\text{Im } u_i$ et $\text{Im } u_j$ sont orthogonaux.
- (c) L'adjoint d'un endomorphisme unitaire est unitaire, donc on peut remplacer chaque u_i par u_i^* en conservant les hypothèses du 2. On obtient alors $I_E = \sum u_i \circ u_i^*$, soit $E = \sum \text{Im } u_i$. Ces espaces vectoriels étant deux à deux orthogonaux, la somme est directe, donc en passant aux dimensions, on obtient $n = \sum_{i=1}^p \text{rg } u_i$.
- (d) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des complexes de module 1. $\sum \lambda_i f(u_i \circ w) = f(\sum \lambda_i u_i \circ w) = f((\sum \lambda_i u_i) \circ w)$. Cet endomorphisme est unitaire car $\sum \lambda_i u_i$ et w le sont, donc l'image par f de leur composé aussi. En appliquant la question 2c aux endomorphismes $f(u_i \circ w)$, on en déduit que $\sum_{i=1}^p \text{rg } f(u_i \circ w) = n$.
- (e) L'énoncé nous demande d'admettre la connexité par arcs de $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, qui se démontre en diagonalisant w dans le groupe unitaire, les valeurs propres étant de module 1.
 D'après 2d, $\forall t \in [0, 1], \sum \text{rg } \varphi_i(t) = n$, où on a posé φ_i la fonction continue $t \mapsto f(u_i \circ \varphi(t))$. Soit $t_0 \in [0, 1]$ et $r = \text{rg } \varphi_i(t_0)$. Il existe donc un déterminant extrait de $\varphi_i(t_0)$ de taille r non nul, donc par continuité de φ_i , il existe un voisinage de t_0 sur lequel la propriété est encore vérifiée et donc $\text{rg } \varphi_i(t) \geq r$. On procède ainsi pour chaque indice i et on sait que $\sum_{i=1}^p \text{rg } \varphi_i(t) = n$, donc on en déduit que sur un intervalle $]t_0 - \alpha(t_0), t_0 + \alpha(t_0)[$ (inclus dans

l'intersection des voisinages précédents), toutes les fonctions φ_i sont de rang constant. On recouvre le compact $[0, 1]$ par ces ouverts, on en extrait un sous recouvrement fini, dont les intervalles se chevauchent, et en regardant les valeurs de φ_i sur ces intersections, on en déduit que chaque fonction φ_i est constante sur $[0, 1]$, d'où $\text{rg } f(u_i \circ w) = \text{rg } \varphi_i(1) = \text{rg } \varphi_i(0) = \text{rg } f(u_i)$, donc le rang de $f(u_i \circ w)$ reste constant.

- (f) Remarquons qu'en prenant $w = I_E$ et en appliquant 2e, on obtient $\text{rg } f(u_i \circ w) = \text{rg } f(u_i)$. En procédant comme aux questions 2d et 2e, on démontre que $\forall w \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, $\text{rg } f(w \circ u_i) = \text{rg } f(u_i)$. Si w_2 est unitaire et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sont de module 1, $(\sum_i \lambda_i u_i \circ w_2)^* (\sum_i \lambda_i u_i \circ w_2) = w_2^* \circ (\sum_i \lambda_i u_i)^* \circ (\sum_i \lambda_i u_i) \circ w_2 = w_2^* \circ I_E \circ w_2 = I_E$, donc les endomorphismes $(u_1 \circ w_2, \dots, u_p \circ w_2)$ vérifient l'hypothèse de la question 2.

On en déduit que pour w_1 unitaire, $\text{rg } f(w_1 \circ u_i \circ w_2) = \text{rg } f(u_i \circ w_2)$. Or $\text{rg } f(u_i \circ w_2) = \text{rg } f(u_i)$, donc $\text{rg } f(w_1 \circ u_i \circ w_2) = \text{rg } f(u_i)$.

3. $\underline{e}$ désigne la base canonique de E . Soit u_i le projecteur orthogonal sur la droite $\mathbb{C}e_i$, pour $1 \leq i \leq n$.

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ étant des complexes de module 1, $\sum_{i=1}^n$ a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ dans la base $\underline{e}$

et est donc clairement unitaire.

4. Soit u un endomorphisme de rang 1. Il existe un vecteur unitaire e et une forme linéaire non nulle l tels que $\forall x \in E$, $u(x) = l(x)e$.

Si w_1 et w_2 sont deux endomorphismes, $(w_1 \circ u \circ w_2)(x) = l(w_2(x))w_1(e)$.

On introduit alors w_1 unitaire tel que $w_1(e) = e_i$ et w_2 unitaire envoyant l'hyperplan $(\mathbb{C}e_i)^\perp$ sur l'hyperplan $\text{Ker } l$, de sorte que $\text{Ker } (l \circ w_2) = (\mathbb{C}e_i)^\perp$. On en déduit que $\exists \alpha \neq 0, \forall x \in E$, $(l \circ w_2)(x) = \alpha(e_i | x)$.

On a alors $\forall x \in E$, $(w_1 \circ u \circ w_2)(x) = \alpha(e_i | x)e_i$, donc $w_1 \circ u \circ w_2 = \alpha u_i$, i.e $u = \alpha w_1^{-1} \circ u_i \circ w_2^{-1}$. D'après 2 et 3, $\text{rg } f(u) = \text{rg } f(w_1^{-1} \circ u_i \circ w_2^{-1}) = \text{rg } f(u_i)$. Or $\sum_{i=1}^n \text{rg } f(u_i) = n$ d'après 2d, donc $\text{rg } f(u) = n$, d'où $\text{rg } f(u) = 1$. Par conséquent $f(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$, et grâce à la partie 1, $f \in \mathcal{G}$.

N.B : Si $f = \varphi_{P,Q}$, on peut démontrer (à l'aide d'une décomposition polaire) que $\exists \lambda \in \mathbb{C}^*$, $P \in \lambda \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et $Q \in \frac{1}{\lambda} \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$.