Correction de la deuxième épreuve de mathématiques CCP 2010
Proposée par M. Chehabi

Quelques utilisations des projecteurs .

I. Des questions préliminaires

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   On a $A^2 = 0$ et $B^2 = 0$ donc $\exp(A) = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

   $\exp(B) = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   On a $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A+B)^2 = I_2$ puis $\forall k \in \mathbb{N}$, $(A+B)^{2k} = I_2$ et $(A+B)^{2k+1} = A + B$. Donc

$$\begin{aligned}
\exp(A+B) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} I_2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(A+B) = ch(1)I_2 + sh(1)(A+B) \\
&= \begin{pmatrix} ch(1) & sh(1) \\ sh(1) & ch(1) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Si $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $AB = BA$ alors $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$

II. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas diagonalisable

3. On considère l'application linéaire $\phi : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_{r-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^r \\ P & \longmapsto & (P(\lambda_1), P(\lambda_2), ..., P(\lambda_r)) \end{array}$.

   Posons $\pi = \prod\limits_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$.

   Soit $P \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$.

$$P \in Ker\phi \Longleftrightarrow \forall i \in \{1, ..., r\}, \quad P(\lambda_i) = 0 \Longleftrightarrow P \in \pi\mathbb{R}[X]$$

Donc $Ker\phi = \mathbb{R}_{r-1}[X] \cap \pi\mathbb{R}[X] = \{0\}$.

On a ϕ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^r$ et $\dim \mathbb{R}_{r-1}[X] = \dim \mathbb{R}^r = r$ donc ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^r$.

On a $(e^{\lambda_1}, \ldots.., e^{\lambda_r}) \in \mathbb{R}^r$ et ϕ est bijective, donc il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que $\phi(L) = (e^{\lambda_1}, \ldots.., e^{\lambda_r})$ et alors $\forall i \in \{1, ..., r\}$, $L(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.

4. .

   (a) $\forall (i,j) \in \{1, ..., r\}^2,\ \ l_i(\lambda_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ i = j \\ 0 & \text{si } \ i \neq j \end{cases}$

   (b) La famille $(l_1, l_2, ..., l_r)$ est libre de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$. En effet, soit $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i l_i = 0$ alors $\forall j \in \{1, ..., r\}$, $\left(\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i l_i\right)(\lambda_j) = 0$,donc $\alpha_j = 0$.

   Comme dim $\mathbb{R}_{r-1}[X] = r$ alors $(l_1, l_2, ..., l_r)$ est une base de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$.

   On a $L \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ donc il existe $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $L = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i l_i$ et alors $\forall j \in \{1, ..., r\}$, $\alpha_j = \left(\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i l_i\right)(\lambda_j) = L(\lambda_j) = e^{\lambda_j}$.

   Ainsi $L = \sum\limits_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} l_i$.

5. Une propriété de l'exponentielle

   (a) L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array}$ est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc cette application est continue.

   (b) On a

$$\begin{aligned} \exp(PDP^{-1}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(PDP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{PD^kP^{-1}}{k!} \\ &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{PD^kP^{-1}}{k!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!}\right)P^{-1} \end{aligned}$$

   Comme l'application $\ M \longmapsto PMP^{-1}$ est continue, alors
   $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} P\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!}\right)P^{-1} = P\left(\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!}\right)P^{-1} = P\exp(D)P^{-1}$.
   Ainsi $\ \exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}$.

6. On a A est diagonalisable, donc il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r I_{m_r} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $A = PDP^{-1}$, où $\forall i \in \{1, ..., r\}$, m_i est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i et $I_{m_i} \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{R})$.

Posons $L = \sum\limits_{i=0}^{r-1} \alpha_i X^i$.

On a $L(A) = \sum\limits_{i=0}^{r-1} \alpha_i A^i = \sum\limits_{i=0}^{r-1} \alpha_i (PDP^{-1})^i = \sum\limits_{i=0}^{r-1} \alpha_i PD^iP^{-1} = PL(D)P^{-1}$.

On a d'après la question 3) $\forall i \in \{1,...,r\}$, $L(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$, donc

$$\begin{aligned} L(D) &= \begin{pmatrix} L(\lambda_1 I_{m_1}) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L(\lambda_r I_{m_r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\lambda_1) I_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L(\lambda_r) I_{m_r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} I_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_r} I_{m_r} \end{pmatrix} = \exp(D) \end{aligned}$$

et alors $L(A) = PL(D)P^{-1} = P\exp(D)P^{-1} = \exp(PDP^{-1}) = \exp(A)$ (d'après la question 5) b)).

7. Soit λ une valeur propre de v et x un vecteur propre associé.

   Soit $P = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(v)(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i v^i(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i \lambda^i x = P(\lambda)x$.

8. .

   (a) Soient $j \in \{1,...,r\} \backslash \{i\}$ et $x \in E_j$. On a

   $$p_i(x) = l_i(v)(x) = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r} (\lambda_i - \lambda_k)} \left(\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i \text{ et } k\neq j}}^{r} (v - \lambda_k id) \right) ((v - \lambda_j id)(x)) = 0.$$

   Donc $\forall x \in \bigoplus\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r} E_j$ on a $p_i(x) = 0$.

   Soit $x \in E_i$, on a $\forall k \in \{1,...,r\} \backslash \{i\}$, $(v - \lambda_k id)(x) = (\lambda_i - \lambda_k)x$ et donc $l_i(v)(x) = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r} (\lambda_i - \lambda_k)} \prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r} (\lambda_i - \lambda_k)x = x$.

   Comme $E = E_i \oplus \left(\bigoplus\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r} E_k \right)$ alors p_i est le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r} E_k$.

   (b) On a d'après les questions 4)b) et 6), $\exp(A) = L(A) = \sum\limits_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} l_i(A)$, et puisque l'application $\mathcal{M}at_B : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ w & \longmapsto & \mathcal{M}at_B(w) \end{array}$ est un isomorphisme d'algèbre, alors $\forall i \in \{1,...,r\}$ $l_i(A) = \mathcal{M}at_B(l_i(v)) = \mathcal{M}at_B(p_i)$ et donc $\exp(A) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i}\mathcal{M}at_B(p_i)$.

III. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas non diagonalisable

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme minimal est $\pi_u = (X-1)^2(X-2)$.

9. u n'est pas diagonalisable car son polynôme minimal n'est pas à racines simples .

10. On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

    On a le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = -(X-1)^2(X-2)$.

    On a $E_1(A) = Vect(x_1)$ où $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\dim E_1(A) = 1$ cette dimension est différente de 2, l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1, donc A n'est pas diagonalisable .

    Posons π_A le polynôme minimal de A. On a 1 et 2 sont racines de π_A, π_A unitaire divise χ_A et π_A n'est pas à racines simples, donc $\pi_A = (X-1)^2(X-2)$.

11. On a $\pi_u = (X-1)^2(X-2)$ et $(X-1)^2 \wedge (X-2) = 1$, donc d'après le théorème de décomposition des noyaux et le fait que $Ker\pi_u(u) = E$, on a :

$$E = Ker(u-id)^2 \oplus Ker(u-2id).$$

12. On considère $p = (u-id)^2$ et $q = u \circ (2id - u)$.

    On a $p + q = (u^2 - 2u + id) + (2u - u^2) = id$.

13. Soit $x \in Ker(u-2id)$, alors $u(x) = 2x$ donc $p(x) = (u^2 - 2u + id)(x) = x$.

    Soit $x \in Ker(u-id)^2$ alors $p(x) = (u-id)^2(x) = 0$.

    Comme $E = Ker(u-id)^2 \oplus Ker(u-2id)$ alors p est le projecteur sur $Ker(u-2id)$ parallèlement à $Ker(u-id)^2$.

    On a $q = id - p$, donc q est le projecteur sur $Ker(u-id)^2$ parallèlement à $Ker(u-2id)$.

14. Soit $x \in E$.

    (a) On a $p(x) \in Ker(u-2id)$, donc $(u-2id)(p(x)) = 0$.

(b) Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k \circ p = 2^k p$.
Pour $k = 0$ c'est trivial
Pour $k = 1$, on a d'après a), $(u - 2id) \circ p = 0$ donc $u \circ p = 2p$.
Soit $k \geq 1$, supposons que $u^k \circ p = 2^k p$.
On a $u^{k+1} \circ p = u \circ (u^k \circ p) = u \circ (2^k p) = 2^k u \circ p = 2^{k+1} p$.
Ainsi $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k \circ p = 2^k p$.

(c) On a , les applications $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ v & \longmapsto & v \circ p \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ \mu & \longmapsto & \mu p \end{array}$ sont continues (car sont linéaires et $\mathcal{L}(E)$ et $\mathbb{R}$ sont de dimensions finies), donc $\exp(u) \circ p = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!} \right) \circ p = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(u^k \circ p \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} p = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} \right) p = e^2 p$ et alors $\beta = e^2$.

15. On a q est le projecteur sur $Ker(u - id)^2$ parallèlement à $Ker(u - 2id)$, donc $(u - id)^2 \circ q = 0$ et alors $\forall k \geq 2,\ (u - id)^k \circ q = 0$.

On a id et $(u - id)$ commutent , donc $\exp(id + (u - id)) = \exp(id) \exp(u - id)$ et puisque $\exp(id) = e(id)$ alors $\exp(u) = e \exp(u - id)$.

Donc

$$\begin{aligned} \exp(u) \circ q &= e \exp(u - id) \circ q = e \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(u - id)^k}{k!} \right) \circ q \\ &= e \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left((u - id)^k \circ q \right) = e \left(q + (u - id) \circ q \right) = e \left(u \circ q \right) \end{aligned}$$

et alors $\gamma = e$.

16. On a $\exp(u) \circ p = \beta p$ et $\exp(u) \circ q = \gamma \left(u \circ q \right)$, donc

$$\begin{aligned} \exp(u) &= \exp(u) \circ (p + q) = \exp(u) \circ p + \exp(u) \circ q = \beta p + \gamma \left(u \circ q \right) \\ &= -\gamma u^3 + (\beta + 2\gamma) u^2 - 2\beta u + \beta id = -e u^3 + (e^2 + 2e) u^2 - 2e^2 u + e^2 id. \end{aligned}$$

IV. Un calcul de distances à l'aide des projecteurs orthogonaux

17.
$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$$

18. On a $n \in E \backslash \{0\}$ et $H = (Vect\{n\})^{\perp}$ donc $E = H \overset{\perp}{\oplus} (Vect\{n\})$.
Soit $x \in E$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = p_H(x) + \alpha n$, donc
$\langle x, n \rangle = \langle p_H(x), n \rangle + \langle \alpha n, n \rangle = \alpha \|n\|^2$ (car $\langle p_H(x), n \rangle = 0$) et alors $\alpha = \dfrac{\langle x, n \rangle}{\|n\|^2}$, donc

$$d(x, H) = \|x - p_H(x)\| = \|\alpha n\| = \frac{|\langle x, n \rangle|}{\|n\|}$$

19. **Une application :**

   (a) $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); Tr(M) = 0\}$ est le noyau de la forme linéaire non nulle $Tr : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & Tr(M) \end{array}$, donc H est un hyperlan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   On a $\forall M \in H$, $\langle I_n, M\rangle = Tr\left({}^tI_nM\right) = Tr\left(M\right) = 0$ donc $I_n \in H^\perp$, et puisque H est un hyperlan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $I_n \neq 0$ alors $H^\perp = (Vect\{I_n\})$.

   (b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a d'après la question 18)

$$d(M,H) = \frac{|\langle M, I_n\rangle|}{\|I_n\|} = \frac{|Tr(M)|}{\sqrt{n}}.$$

20. $E = \mathbb{R}^2$, $F = Vect\{(1,0)\}$ et $x = (1,1)$.

   $\forall\ y \in F$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y = (\alpha, 0)$, donc $N_\infty(x-y) = \max\{|1-\alpha|\,, 1\} \geq 1$ et alors en passant à la borne inférieure on a $d_\infty(x,F) \geq 1$.

   Pour $y_0 = (1,0) \in F$ on a $N_\infty(x-y_0) = 1$ donc $d_\infty(x,F) \leq 1$ et par suite $d_\infty(x,F) = 1$.

   Notons $\mathcal{A} = \{m \in F;\ N_\infty(x-m) = d_\infty(x,F)\}$

   Soit $m \in F$ tel que $N_\infty(x-m) = d_\infty(x,F) = 1$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $m = (\alpha, 0)$.

$$\begin{array}{rcl} N_\infty(x-m) & = & 1 \Longleftrightarrow \max\{|1-\alpha|\,, 1\} = 1 \\ & \Longleftrightarrow & |1-\alpha| \leq 1 \\ & \Longleftrightarrow & \alpha \in [0,2] \end{array}$$

   Donc l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{(\alpha, 0) \in \mathbb{R}^2;\ \alpha \in [0,2]\}$$

   Ainsi $d_\infty(x,F)$ est atteinte en une infinité d'éléments de F.