

# CONCOURS MINES-PONTS

CORRIGÉ MATHÉMATIQUES I - MP

m.laamoum@gmail.com

## Théorème de De Moivre-Laplace

### Résultats préliminaires

1 ▷ Formule de Stirling :  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .

On a  $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$ , posons pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varepsilon_n = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} - 1$ , cette suite vérifie  $\varepsilon_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + \varepsilon_n).$$

2 ▷ Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n = [x] = \max\{k \in \mathbb{Z}, k \leq x\}$ . Donc  $n \leq x < n + 1$  et  $n = [x]$  la partie entière de  $x$ , ainsi

$$[x] = [x]$$

Si  $m = \lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z}, x \leq k\}$  alors  $x = m$  si  $x \in \mathbb{Z}$  et  $m - 1 < x < m$  si  $x \notin \mathbb{Z}$ , ainsi

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} [x] + 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On a alors  $[x] - 1 < x \leq [x]$  et  $x \leq [x] < x + 1$

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\mu \in \mathbb{R}$ .

— On a  $\lambda x + \mu - 1 < \lfloor \lambda x + \mu \rfloor \leq \lambda x + \mu$  et  $1 + \frac{\mu-1}{\lambda x} < \frac{\lfloor \lambda x + \mu \rfloor}{\lambda x} \leq 1 + \frac{\mu-1}{\lambda x}$  par le théorème d'encadrement on a  $\frac{\lfloor \lambda x + \mu \rfloor}{\lambda x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$  et

$$\lfloor \lambda x + \mu \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda x$$

— De même on a  $\lambda x + \mu \leq \lceil \lambda x + \mu \rceil < \lambda x + \mu + 1$ , on en déduit  $\frac{\lceil \lambda x + \mu \rceil}{\lambda x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$

$$\lceil \lambda x + \mu \rceil \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda x$$

3 ▷ Oa  $t^2 \Phi(t) = \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\rightarrow} 0$  donc  $\Phi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) dt$  converge.

4 ▷  $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$  donc

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= (x+1) \ln(x+1) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2) \\ &= x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

### Etude asymptotique d'une suite

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $x_n = \lceil np - q \rceil$  et  $p_n = \mathbb{P}(X_n = x_n)$ .

5 ▷ Soit  $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que

$$\mathbb{P}(X_n = m) = \max\{\mathbb{P}(X_n = k), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$$

la suite  $(\mathbb{P}(X = k))_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  change alors de sens de variation en  $m$  de sorte que

$$\frac{\mathbb{P}(X = m)}{\mathbb{P}(X = m-1)} \geq 1 \quad \text{et} \quad \frac{\mathbb{P}(X = m+1)}{\mathbb{P}(X = m)} \leq 1$$

On sait que  $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  donc

$$\frac{P(X = k)}{P(X = k - 1)} = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{\binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{n+1-k}{k} \frac{p}{q}$$

par suite  $\frac{n+1-m}{m} \frac{p}{q} \geq 1$  et  $\frac{n-m}{m+1} \frac{p}{q} \leq 1$  ce qui donne

$$(n+1)p \geq m \quad \text{et} \quad (n+1)p \leq m+1$$

qui s'écrit  $(n+1)p - 1 \leq m \leq (n+1)p$  et

$$np - q \leq m \leq (np - q) + 1$$

Ainsi  $m = \lceil np - q \rceil = x_n$ .

6 ▷

— D'après la question 2 on a

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} np$$

et  $n - x_n = (1-p)n + o(n)$  donc  $n - x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nq$ . Ce qui donne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - x_n) = +\infty$ .

— On a  $p_n = \mathbb{P}(X_n = x_n) = \binom{n}{x_n} p^{x_n} q^{n-x_n}$ . Comme  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $(n - x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , la formule de Stirling donne

$$\begin{aligned} \binom{n}{x_n} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi x_n} \left(\frac{x_n}{e}\right)^{x_n} \sqrt{2\pi(n-x_n)} \left(\frac{n-x_n}{e}\right)^{n-x_n}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{nn^n}}{\sqrt{2\pi x_n(n-x_n)} x_n^{x_n} (n-x_n)^{n-x_n}} \end{aligned}$$

de plus  $x_n(n-x_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2 pq$  donc

$$\binom{n}{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^n}{\sqrt{npq} \sqrt{2\pi x_n} (n-x_n)^{n-x_n}}$$

qui donne

$$\sqrt{npq} p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi x_n} (n-x_n)^{n-x_n}}$$

7 ▷ Soit  $n > \max\left\{\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\right\}$ .

Puisque  $x_n = \lceil np - q \rceil$  alors  $np - q \leq x_n \leq (np - q) + 1$  et  $\frac{-q}{n} \leq \frac{x_n - np}{n} \leq \frac{p}{n}$ . On a alors  $\frac{-q}{np} \leq \frac{x_n - np}{np}$  et  $\frac{-p}{nq} \leq \frac{np - x_n}{nq}$ , de  $n > \max\left\{\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\right\}$  on déduit que  $\frac{x_n - np}{np} > -1$  et  $\frac{np - x_n}{nq} > -1$  ainsi  $\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right)$  et  $\zeta\left(\frac{np - x_n}{nq}\right)$  ont un sens.

Ecrivons

$$\begin{aligned} \frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{x_n^{x_n} (n-x_n)^{n-x_n}} &= \frac{(np)^{x_n} (nq)^{n-x_n}}{x_n^{x_n} (n-x_n)^{n-x_n}} \\ &= \left(\frac{x_n}{np}\right)^{-x_n} \left(\frac{n-x_n}{nq}\right)^{-n+x_n} \\ &= \left(\frac{x_n}{np}\right)^{-x_n} \left(\frac{n-x_n}{nq}\right)^{-n+x_n} \end{aligned}$$

et  $\left(\frac{x_n}{np}\right)^{-x_n} = \exp\left(-x_n \ln\left(\frac{x_n}{np}\right)\right) = \exp\left(-np\zeta\left(\frac{x_n}{np}\right) - 1\right)$  de même  $\left(\frac{n-x_n}{nq}\right)^{-n+x_n} = \exp\left(-nq\zeta\left(\frac{np-x_n}{nq}\right)\right)$  ce qui donne

$$\frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{x_n^{x_n} (n-x_n)^{n-x_n}} = e^{-np\zeta\left(\frac{x_n}{np}\right) - nq\zeta\left(\frac{np-x_n}{nq}\right)}$$

8 ▷ On a  $x_n = \lceil np - q \rceil$  et  $np - q \leq x_n \leq (np - q) + 1$  donc  $\frac{-q}{n} \leq \frac{x_n - np}{n} \leq \frac{1}{n}$  qu'on écrit  $\frac{x_n - np}{n} = O(\frac{1}{n})$   
La question 4 donne

$$\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) = \frac{x_n - np}{np} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } \zeta\left(\frac{np - x_n}{nq}\right) = \frac{x_n - np}{nq} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

par suite

$$np\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) + nq\zeta\left(\frac{np - x_n}{nq}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et  $e^{-np\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) - nq\zeta\left(\frac{np - x_n}{nq}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  on en déduit :

$$\sqrt{npq}p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

## Convergence en loi

9 ▷ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a  $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$  donc  $Y_n(\Omega) = \{\tau_{n,k}, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ .

Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}(Y_n = \tau_{n,k}) = \mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ .

On sait que  $\mathbb{E}(X_n) = np$  et  $\mathbb{V}(X_n) = npq$ . De la linéarité de l'espérance on déduit :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{\sqrt{npq}} (\mathbb{E}(X_n) - np) = 0$$

Les propriétés de la variance donnent :

$$\mathbb{V}(Y_n) = \frac{1}{npq} \mathbb{V}(X_n - np) = \frac{1}{npq} \mathbb{V}(X_n) = 1.$$

Donc  $Y_n$  est une variable aléatoire centrée réduite.

10 ▷ On a  $a < b$ ,  $\tau_{n,0} = \frac{-p}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}$ ,  $\tau_{n,n} = \frac{q}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}$ . Il existe  $N_1, N_2$  dans  $\mathbb{N}^*$  tels que si  $n > N_1$  alors  $\tau_{n,0} < a$  et si  $n > N_2$  alors  $b < \tau_{n,n}$ , de plus  $\frac{1}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , pour  $\varepsilon = b - a$  il existe  $N_3$  dans  $\mathbb{N}^*$  tel que si  $n \geq N_3$  alors  $\frac{1}{\sqrt{npq}} \leq \varepsilon$ .

Ainsi pour  $N = \max(N_1, N_2, N_3)$ , si  $n \geq N$  alors  $[a, b] \subset [\tau_{n,0}, \tau_{n,n}]$  et  $\frac{1}{\sqrt{npq}} \leq b - a$ .

11 ▷ Soit  $t \in \mathbb{R}$ ,  $k_n(t) = \lfloor \sqrt{npqt} + np \rfloor$  et  $e_n(t) = \frac{k_n(t) - np}{\sqrt{npq}}$ . De l'inégalité

$$k_n(t) \leq \sqrt{npqt} + np < k_n(t) + 1$$

ona

$$e_n(t) \leq t < e_n(t) + \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

Qui s'écrit  $0 \leq t - e_n(t) < \frac{1}{\sqrt{npq}}$ , ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n(t) = t$  et  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers  $e : t \mapsto t$ .

12 ▷

— On a

$$\int_a^b \Phi(t) dt - \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} \Phi(t) dt = \int_a^{\tau_{n,k_n(a)}} \Phi(t) dt + \int_{\tau_{n,k_n(b)+1}}^b \Phi(t) dt$$

Remarquons que  $\tau_{n,k_n(b)+1} = \tau_{n,k_n(b)} + \frac{1}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$  et  $\tau_{n,k_n(a)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$  et  $\Phi$  est continue donc

$$\int_a^{\tau_{n,k_n(a)}} \Phi(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \int_{\tau_{n,k_n(b)+1}}^b \Phi(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et

$$\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} \Phi(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \Phi(t) dt$$

— Nous avons

$$\mathbb{P}(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) = \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} \mathbb{P}(Y_n = \tau_{n,k})$$

Soit  $m \in [k_n(a), k_n(b)]$ , on a  $k_n(t) = m$  pour tout  $t$  dans  $[\tau_{n,m}, \tau_{n,m+1}[$  par suite  $e_n(t) = \tau_{n,m}$  et  $f_n(t) = \sqrt{npq} \mathbb{P}(Y_n = \tau_{n,m})$  donc  $f_n$  est en escalier et

$$\mathbb{P}(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} f_n(\tau_{n,k}) = \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} (\tau_{n,m+1} - \tau_{n,m}) f_n(\tau_{n,k})$$

on reconnaît l'intégrale d'une fonction en escalier sur l'intervalle  $[\tau_{n,k_n(a)}, \tau_{n,k_n(b)+1}]$ , ainsi

$$\mathbb{P}(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) = \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t) dt$$

**13**  $\triangleright$  Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . On a  $f_n(\tau_{n,k}) = \sqrt{npq} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ , d'après la question 1 :  $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + \varepsilon_n)$  ce qui donne

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{nn^n}}{\sqrt{k(n-k)k^k (n-k)^{n-k}}} \frac{1 + \varepsilon_n}{(1 + \varepsilon_k)(1 + \varepsilon_{n-k})}$$

écrivons  $n^n = n^k n^{n-k}$ , ce qui donne

$$f_n(\tau_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{pqn^2}{k(n-k)}} \frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} \frac{1 + \varepsilon_n}{(1 + \varepsilon_k)(1 + \varepsilon_{n-k})}$$

**14**  $\triangleright$  Soit  $t \in [a, b]$ , les équivalences  $k_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} np$  et  $n - k_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nq$  donnent

$$\sqrt{\frac{pqn^2}{k_n(t)(n - k_n(t))}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{pqn^2}{np(nq)}} = 1$$

et  $\varepsilon_{k_n(t)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ , ainsi

$$\sqrt{\frac{pqn^2}{k_n(t)(n - k_n(t))}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1 \text{ et } \frac{1}{(1 + \varepsilon_{k_n(t)})(1 + \varepsilon_{n - k_n(t)})} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1.$$

**15**  $\triangleright$  Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tels que  $\max\left\{\sqrt{\frac{q}{np}}, \sqrt{\frac{p}{nq}}\right\} \times |\tau_{n,k}| < 1$ .

Donc  $\sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k} > -1$  et  $-\sqrt{\frac{p}{nq}} \tau_{n,k} > -1$  ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{np}\right)^{-k} &= \exp\left(-k \ln\left(\frac{k}{np}\right)\right) \\ &= \exp\left(-np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k}\right)\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{n-k}{nq}\right)^{-n+k} &= \exp\left(-(n-k) \ln\left(\frac{n-k}{nq}\right)\right) \\ &= \exp\left(-nq\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}} \tau_{n,k}\right)\right) \end{aligned}$$

ainsi

$$\frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} = e^{-np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k}\right) - nq\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}} \tau_{n,k}\right)}$$

**16**  $\triangleright$  On sait que  $\tau_{n,k_n(t)} = e_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} t$ , le développement limité de  $\zeta$  donne

$$np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}} \tau_{n,k_n(t)}\right) = \sqrt{qnp} \tau_{n,k_n(t)} + \frac{1}{2} q \tau_{n,k_n(t)}^2 + o(1)$$

et

$$nq\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k_n(t)}\right) = -\sqrt{nqp}\tau_{n,k_n(t)} + \frac{1}{2}p\tau_{n,k_n(t)}^2 + o(1).$$

de la question 15 on a

$$\frac{p^{k_n(t)}q^{n-k_n(t)}}{\binom{k_n(t)}{n} \binom{n-k_n(t)}{n}} = e^{-\frac{1}{2}e_n(t)^2 + o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

17▷

— Les questions 13 , 14 et 15 donnent

$$f_n(\tau_{n,k_n(t)}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{p^{k_n(t)}q^{n-k_n(t)}}{\binom{k_n(t)}{n} \binom{n-k_n(t)}{n}}$$

donc  $f_n(\tau_{n,k_n(t)}) = f_n(e_n(t)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ .

Soit  $N$  définie dans la question 10 et  $n \geq N$  donc  $[a, b] \subset [\tau_{n,0}, \tau_{n,n}]$  et  $\frac{1}{\sqrt{npq}} \leq b - a$ .

Donc il existe un entier  $m$  tel que  $t$  est dans  $[\tau_{n,m}, \tau_{n,m+1}[$  par suite  $k_n(t) = m$ ,  $e_n(t) = \tau_{n,m}$  et  $f_n(t) = \sqrt{npq} \mathbb{P}(Y_n = \tau_{n,m})$ ,  $f_n$  est constante sur  $[\tau_{n,m}, \tau_{n,m+1}[$  d'où  $f_n(e_n(t)) = f_n(t)$  et

$$f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = \Phi(t).$$

— On a  $f_n(t) = \sqrt{npq} \mathbb{P}(Y_n = \tau_{n,k_n(t)}) = \sqrt{npq} \mathbb{P}(X_n = k_n(t))$ .

D'après la question 5  $0 \leq f_n(t) \leq \sqrt{npq} p_n$  avec  $p_n \max\{\mathbb{P}(X_n = k), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ .

Dans la question 8 on a démontré que  $\sqrt{npqp_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , ce qui prouve que  $f_n$  est uniformément bornée (majorée par une constante  $M$  indépendante de  $n$ ). Le théorème de la convergence dominée appliqué sur le segment  $[a, b]$  donne

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \Phi(t) dt$$

18 ▷

— De la question 12 et la relation  $\tau_{n,k+1} = \tau_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{npq}}$  on a

$$\mathbb{P}(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) = \int_{e_n(a)}^{e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}}} f_n(t) dt$$

$f_n$  est uniformément bornée par  $M \leq 0$  donc

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_{e_n(a)}^{e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}}} f_n(t) dt \right| \leq M \left( |a - e_n(a)| + \left| b - e_n(b) - \frac{1}{\sqrt{npq}} \right| \right)$$

la majoration de la question 11 donne

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_{e_n(a)}^{e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}}} f_n(t) dt \right| \leq \frac{3M}{\sqrt{npq}}$$

qui tend vers 0, ainsi  $\left| \mathbb{P}(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) - \int_a^b f_n(t) dt \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Finalement on écrit

$$\left| \mathbb{P}(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) - \int_a^b \Phi(t) dt \right| \leq \left| \mathbb{P}(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) - \int_a^b f_n(t) dt \right| + \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b \Phi(t) dt \right|$$

les deux quantité tendent vers 0, d'où

$$\mathbb{P}(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \Phi(t) dt$$

— Soit  $N$  définie dans la question 10 et  $n \geq N$  donc  $[a, b] \subset [\tau_{n,0}, \tau_{n,n}]$  et  $\frac{1}{\sqrt{npq}} \leq b - a$ .  
Rappelons que  $Y_n(\Omega) = \{\tau_{n,k}, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$  et  $e_n(t) \leq t < e_n(t) + \frac{1}{\sqrt{npq}}$ .

Remarquons que  $Y_n(\Omega) \cap ]e_n(t), e_n(t) + \frac{1}{\sqrt{npq}}[ = \emptyset$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) &= \mathbb{P}\left(e_n(a) \leq Y_n < e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}}\right) \\ &= \mathbb{P}(Y_n = e_n(a)) + \mathbb{P}\left(e_n(a) < Y_n < e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}}\right) \end{aligned}$$

Comme  $Y_n(\Omega) \cap \left(]e_n(a), a[ \cup ]b, e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}}[\right) = \emptyset$  alors

$$\mathbb{P}\left(e_n(a) < Y_n < e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}}\right) = \mathbb{P}(a \leq Y_n \leq b)$$

D'autre part

$$\mathbb{P}(Y_n = e_n(a)) = \mathbb{P}(X_n = k_n(a)) \leq p_n \text{ et } p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}},$$

donc  $\mathbb{P}(Y_n = e_n(a)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ .

Ce qui prouve  $\mathbb{P}(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) - \mathbb{P}(a \leq Y_n \leq b) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ , il s'en suit alors

$$\mathbb{P}(a \leq Y_n \leq b) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \int_a^b \Phi(t) dt$$

## Applications

19 ▷

— Soit  $T \in \mathbb{R}_+^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , remarquons que  $\mathbb{P}(-T < Y_n < T) = \mathbb{P}(|Y_n| < T) = 1 - \mathbb{P}(|Y_n| \geq T)$ , la variable  $Y_n$  est centrée réduite donc  $\mathbb{E}(Y_n) = 0$  et  $\mathbb{V}(Y_n) = 1$ , l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne  $\mathbb{P}(|Y_n| \geq T) \leq \frac{1}{T^2}$  et

$$\mathbb{P}(|Y_n| \leq T) \geq \mathbb{P}(|Y_n| < T) \geq 1 - \frac{1}{T^2}$$

par passage à la limite on obtient

$$\int_{-T}^T \Phi(t) dt \geq 1 - \frac{1}{T^2}$$

— De la même manière puis que  $\mathbb{P}(|Y_n| < T) \leq 1$  par passage à la limite on a

$$\int_{-T}^T \Phi(t) dt \leq 1$$

Le théorème d'encadrement donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T \Phi(t) dt = 1$$

En en déduit  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ .

20 ▷ Montrons pour tout  $b$  réel,

$$\mathbb{P}(Y_n \leq b) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b e^{-x^2/2} dx$$

La convergence de l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  entraîne :  $\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ .

Soient  $b \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$ . Fixons  $c > \max(0, b)$  tel que  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt < \frac{\varepsilon}{2}$ . On a par parité  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-c} e^{-\frac{t^2}{2}} dt < \frac{\varepsilon}{2}$ ,

comme  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$  alors ,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^c e^{-\frac{t^2}{2}} dt > 1 - \varepsilon$$

On peut écrire  $\left| \mathbb{P}(Y_n \leq b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| \leq A_n + B_n + C$  où

$$\begin{aligned} A_n &= \mathbb{P}(Y_n < -c) \\ B_n &= \left| \mathbb{P}(-c \leq Y_n \leq b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| \\ C &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-c} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{aligned}$$

On a  $A_n = 1 - \mathbb{P}(-c \leq Y_n)$  et  $\mathbb{P}(-c \leq Y_n) \geq \mathbb{P}(-c \leq Y_n \leq c)$  donc

$$0 \leq A_n \leq 1 - \mathbb{P}(-c \leq Y_n \leq c)$$

et, d'après la question 18 on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(-c \leq Y_n \leq c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^c e^{-\frac{t^2}{2}} dt > 1 - \varepsilon$$

Cela montre que, pour tout  $n$  assez grand,  $\left| \mathbb{P}(-c \leq Y_n \leq c) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^c e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| < \varepsilon$ , et

$$\mathbb{P}(-c \leq Y_n \leq c) > 1 - 2\varepsilon$$

Ainsi  $A_n < 2\varepsilon$ .

Toujours d'après la question 18,  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0$ , donc pour  $n$  assez grand,  $B_n < \varepsilon$  et, par choix de  $c$ , on a  $C < \varepsilon$ .

Nous avons donc démontré, pour  $n$  assez grand,  $\left| \mathbb{P}(Y_n \leq b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| < 4\varepsilon$ , ce qui donne le résultat.

Comme  $\mathbb{P}(Y_n \leq b) = 1 - \mathbb{P}(b < Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^b \Phi(t) dt$ , alors  $\mathbb{P}(b < Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_b^{+\infty} \Phi(t) dt$ .

## Généralisation

Soit  $\varphi$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  et telle que  $\varphi'$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $Z_n = \varphi \circ Y_n$ .

**21**  $\triangleright$   $\varphi'$  est continue et ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  donc elle garde un signe constant, alors  $\varphi$  est bijective de  $\mathbb{R}$  vers  $\varphi(\mathbb{R})$ .

Supposons  $\varphi' > 0$ , le cas  $\varphi' < 0$  se traite de la même manière.

Soit  $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ , si  $\alpha \leq \beta$ , alors  $\mathbb{P}(\alpha \leq Z_n \leq \beta) = \mathbb{P}(\alpha \leq \varphi \circ Y_n \leq \beta) = \mathbb{P}(\varphi^{-1}(\alpha) \leq Y_n \leq \varphi^{-1}(\beta))$  donc

$$\mathbb{P}(\alpha \leq Z_n \leq \beta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} \Phi(t) dt$$

par changement de variable  $u = \varphi(t)$  on obtient  $\int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} \Phi(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(\varphi^{-1}(u)) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(u))} du$ , ainsi

$$\mathbb{P}(\alpha \leq Z_n \leq \beta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \Psi(t) dt, \text{ avec } \Psi(t) = \frac{\Phi(\varphi^{-1}(t))}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}.$$