

## Corrigé de l'épreuve de Mathématiques II, série TSI, concours CCP 2006

$$\begin{aligned} \text{I. A. 1. a. } xy' - y = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \frac{y}{x} = c \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, y = cx \end{aligned}$$

Les solutions de  $(E'_1) : xy' - y = 0$  sont donc les applications  $\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow cx \end{array}}$  où  $c \in \mathbb{R}$ .

$$\text{b. Soit } \theta : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \quad . \\ x \rightarrow -\ln x - 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, x\theta'(x) - \theta(x) = -1 + 1 + \ln x = \ln x.$$

Donc  $\theta$  est solution particulière de  $(E_1)$ .

c. Les solutions de  $(E_1)$  sont somme d'une solution particulière et de la solution générale de  $(E'_1)$ . Donc l'ensemble des solutions de  $(E_1)$  est :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow -\ln x - 1 + cx \quad / c \in \mathbb{R} \end{array} \right\}}$$

2.  $f$  est de la forme  $\mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow -\ln x - 1 + cx$  où  $c \in \mathbb{R}$  et vérifie  $f(1) = 0 \Leftrightarrow -1 + c = 0$ .

D'où :

$$\boxed{f \text{ est l'application : } \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow -\ln x - 1 + x \end{array}}$$

$$\text{B. 1. a. } \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est solution de } (E'_2) : x^2y'' - xy' + y = 0 \Leftrightarrow \\ x \rightarrow x^\alpha$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, x^\alpha(\alpha(\alpha-1) - \alpha + 1) = 0 &\Leftrightarrow (\alpha-1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc une solution de } (E'_2) \text{ est } \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x \end{array}}$$

b. Toute solution de  $(E'_2)$  est de la forme  $\mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow K(x)x$  où  $K$  est  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et vérifie :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \\ x^2(xK''(x) + 2K'(x)) - x(xK'(x) + K(x)) + xK(x) = 0 &\Leftrightarrow xK''(x) + K'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (xK'(x))' = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, xK'(x) = \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, K(x) = \lambda \ln x + \mu \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc une solution de } (E'_2) \text{ linéairement indépendante de celle trouvée en I.B.1.a. est } \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x \ln x \end{array}}$

c. Les solutions de  $(E'_2)$  sont donc toutes de la forme :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x(\lambda \ln x + \mu) \end{array}}$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des réels quelconques.

2. a.  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, x^2 y_0''(x) - x y_0'(x) + y_0(x) = x^2 \times \frac{1}{x^2} - x \times \frac{-1}{x} - 1 - \ln x = 1 - \ln x$ . Donc :

$y_0$  est solution particulière de  $(E_2)$

b. Les solutions de  $(E_2)$  sont donc toutes de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{+*} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow -1 - \ln x + x(\lambda \ln x + \mu) \end{aligned}$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des réels quelconques.

3.  $f$  est la solution de  $(E_2)$  définie par  $\lambda = 0$  et  $\mu = 1$ .

En outre, l'on sait que  $f(1) = 0$ .

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ ; d'où  $f'(1) = 0$ .

Donc, d'après le théorème de Cauchy relatif aux équations linéaires du second ordre,  $f$  est l'unique solution de  $(E_2)$  vérifiant  $f(1) = 0$  et  $f'(1) = 0$ .

II. 1. a.  $f$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ . Cela donne le tableau de variations de  $f$  suivant :

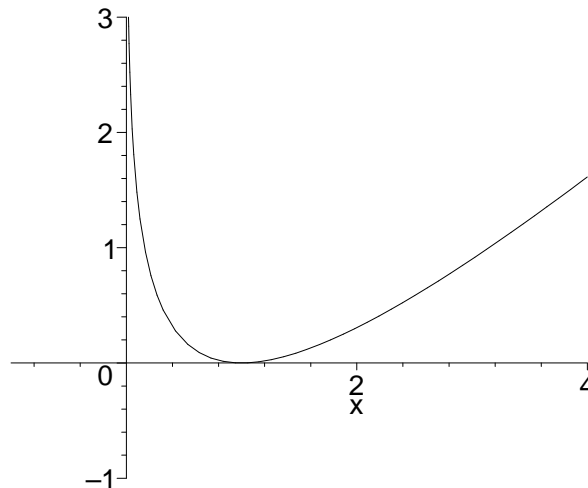
$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$		$+\infty \searrow$	0 ↗ $+\infty$

b.  $(Oy)$  est asymptote à la courbe puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ .

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - x = -\infty$ .

Donc le graphe de  $f$  admet une branche parabolique de direction asymptotique d'équation  $y = x$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

On en déduit l'allure du graphe de  $f$  :



c. Le tableau de variations de  $f$  montre que  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) \geq 0$ , d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln x \leq x - 1$$

$$\begin{aligned} \underline{2. a. \int f(x) dx} &= \int (x - 1 - \ln x) dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x - x \ln x + x + k \text{ où } k \in \mathbb{R} \\ &= \underline{\frac{x^2}{2} - x \ln x + k} \text{ où } k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b.  $f$  est continue sur  $]0, 1]$  et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 f(u) du &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{u^2}{2} - u \ln u \right]_x^1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x^2}{2} + x \ln x \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\int_0^1 f(x) dx \text{ converge et vaut } \frac{1}{2}}$$

c.  $f$  est continue sur  $[1, +\infty[$  et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(u) du &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{u^2}{2} - u \ln u \right]_1^x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2} - x \ln x \\ &= +\infty \text{ car } \frac{x^2 - 1}{2} - x \ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ diverge.}}$$

III. 1. a. D'après II.1.c.,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\ln \frac{a_i}{m_a} \leq \frac{a_i}{m_a} - 1$ . En ajoutant membre à membre ces inégalités, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \ln \frac{a_i}{m_a} \leq \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i}{m_a} - 1 \right) &\Leftrightarrow \ln \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{m_a^n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{m_a} - n = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{m_a^n} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq m_a. \end{aligned}$$

On a obtenu :  $\boxed{m_g \leq m_a}$ .

b. Pour que  $m_g = m_a$ , il faut et il suffit que  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\ln \frac{a_i}{m_a} = \frac{a_i}{m_a} - 1$ , ce qui signifie d'après l'étude de  $f$  que  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\frac{a_i}{m_a} = 1$ , c'est-à-dire que  $a_i = m_a$ .  
Donc :

$$\boxed{m_g = m_a \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_n}$$

c. Si  $x = 0$  ou  $y = 0$  ou  $z = 0$ , l'inégalité proposée est trivialement vraie.

Sinon, posons  $a = x^4 y^2 z^2$ ,  $b = x^2 y^4 z^2$ ,  $c = x^2 y^2 z^4$  et  $d = 1$ . Alors  $a, b, c, d > 0$  et d'après la question III.1.a.,

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a + b + c + d}{4} &\Leftrightarrow \sqrt[4]{x^8 y^8 z^8} \leq \frac{x^4 y^2 z^2 + x^2 y^4 z^2 + x^2 y^2 z^4 + 1}{4} \\ &\Leftrightarrow 4x^2 y^2 z^2 \leq x^4 y^2 z^2 + x^2 y^4 z^2 + x^2 y^2 z^4 + 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x^4 y^2 z^2 + x^2 y^4 z^2 + x^2 y^2 z^4 - 4x^2 y^2 z^2 + 1 \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x^4 y^2 z^2 + x^2 y^4 z^2 + x^2 y^2 z^4 - 4x^2 y^2 z^2 + 1 \geq 0}$$

2. a. D'après III.1.a.,  $\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdots \frac{1}{a_n}} \leq \frac{1}{n} \left( \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{m_g} \leq \frac{1}{m_h}$ . D'où :

$$\boxed{m_h \leq m_g}$$

b. D'après III.1.b.,  $m_h = m_g \Leftrightarrow \frac{1}{a_1} = \cdots = \frac{1}{a_n}$ . D'où :

$$\boxed{m_h = m_g \Leftrightarrow a_1 = \cdots = a_n}$$

c. Comme  $m_h \leq m_g$  et  $m_g \leq m_a$ ,  $\boxed{m_h \leq m_a}$ .

Notons  $M_a = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$  et  $M_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$ . On alors :  $M_h \leq M_a$ , d'où :

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \text{ ce qui montre :}$$

$$\boxed{(x_1 + \cdots + x_n) \left( \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2}$$

#### IV. Applications.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La moyenne géométrique de  $1, \dots, n$  est  $\sqrt[n]{n!}$ . La moyenne arithmétique de  $1, \dots, n$  est  $\frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$ . D'où :

$$\boxed{\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}}$$

2. a.  $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,

$\forall t \in [k-1, k], \frac{1}{k} \leq \frac{1}{t} \Rightarrow \int_{k-1}^k \frac{1}{k} dt \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$ . D'où :

$$\boxed{\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt}$$

b. En sommant ces inégalités membre à membre pour  $k$  variant de 2 à  $n$  ( $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ), on obtient :

$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt$  et en ajoutant 1 aux deux membres :

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt$ . Cette inégalité étant encore vraie pour  $n = 1$ , on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt}$$

c. L'inégalité précédente montre que pour  $n \geq 1$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$ . D'où :

$\frac{n}{1 + \ln n} \leq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$  où ce dernier nombre désigne la moyenne harmonique des  $k$  pour  $k$  variant de 1 à  $n$ .

Comme la moyenne harmonique est inférieure à la moyenne géométrique,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{1 + \ln n} \leq \sqrt[n]{n!}}$$

3. a.  $\frac{n}{1 + \ln n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\ln n}$  qui tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . De la question précédente, on déduit :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty}$$

b. De la question IV.1., on tire  $0 \leq a_n \leq \frac{n+1}{2n} \Rightarrow$

$$\boxed{(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée et } \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq a_n \leq 1}$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ a. } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ln \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \ln \sqrt[n]{n!} &= \frac{n \sum_{k=1}^{n+1} \ln(k) - (n+1) \sum_{k=1}^n \ln(k)}{n(n+1)} \\ &= \frac{-\sum_{k=1}^n \ln(k) + n \ln(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n (\ln(n+1) - \ln(k))}{n(n+1)} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

On en tire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln \sqrt[n+1]{(n+1)!} \geq \ln \sqrt[n]{n!} \Rightarrow \sqrt[n+1]{(n+1)!} \geq \sqrt[n]{n!}$ . D'où :

$$\boxed{\left( \sqrt[n]{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

b. La série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$  est donc une série alternée. La valeur absolue de son terme général décroît (d'après la question précédente) et tend vers 0 (d'après la question IV.3.a.). Donc :

$$\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}} \text{ converge.}}$$

V. 1. a. La fonction  $\ln$  est croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Donc :

$$* \forall t \in [k, k+1], \ln(k) \leq \ln(t) \Rightarrow \int_k^{k+1} \ln(k) dt \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt.$$

$$* \forall t \in [k-1, k], \ln(t) \leq \ln(k) \Rightarrow \int_{k-1}^k \ln(t) dt \leq \int_{k-1}^k \ln(k) dt.$$

On en déduit :

$$\boxed{\int_{k-1}^k \ln(t) dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt}$$

- b. Pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  et  $k$  compris entre 2 et  $n$ , on peut ajouter membre à membre la première inégalité :

$$\int_1^n \ln(t) dt \leq \sum_{k=2}^n \ln(k) = \sum_{k=1}^n \ln(k). \text{ L'inégalité obtenue est encore vraie pour } n = 1.$$

La seconde inégalité est vraie à partir du rang 1. En la sommant membre à membre pour  $k$  compris entre 1 et  $n$ , on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \ln(k) \leq \int_1^{n+1} \ln(t) dt. \text{ L'inégalité obtenue est encore vraie pour } n = 1. \text{ D'où :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^n \ln(t) dt \leq \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq \int_1^{n+1} \ln(t) dt$$

- c. L'encadrement précédent donne pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} [t \ln(t) - t]_1^n &\leq \ln(n!) \leq \ln(n!) \leq [t \ln(t) - t]_1^{n+1} \Rightarrow \\ n \ln(n) - n + 1 &\leq \ln(n!) \leq (n+1) \ln(n+1) - n \Rightarrow \\ n^n e^{-n} e &\leq n! \leq (n+1)^{n+1} e^{-n} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$n e^{-1} \sqrt[n]{e} \leq \sqrt[n]{n!} \leq n^{(n+1)/n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(n+1)/n} e^{-1}$$

Or :

$$* \sqrt[n]{e} = e^{1/n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$$

$$* n^{(n+1)/n} = n e^{\ln(n)/n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0.$$

$$* \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(n+1)/n} = \exp\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Chacun des membres qui encadrent  $\sqrt[n]{n!}$  est donc équivalent à  $\frac{n}{e}$ . D'où :

$$\sqrt[n]{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{e}$$

2.  $\frac{1}{(n!)^{1/n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{n}$ , ce qui montre que :

$$\sum \frac{1}{(n!)^{1/n}} \text{ diverge.}$$

- $\frac{1}{(n!)^{2/n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^2}{n^2}$ , ce qui montre que :

$$\sum \frac{1}{(n!)^{2/n}} \text{ converge.}$$

△△△

Rédigé par

Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI

Lycée Chaptal, 6 allée Chaptal, 22000 St Brieuc

Tel. 0296639414

Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr