

A Coefficients binomiaux

1. • L'application $\varphi : \begin{cases} \{0, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R} \\ k \mapsto \binom{n}{k} \end{cases}$ est à valeurs strictement positives. Pour tout $k \in \left\{0, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right\}$:

$$\varphi(k+1) = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n-k}{k+1} = \varphi(k) \frac{n-k}{k+1}.$$

Or $\frac{n-k}{k+1} \geq \frac{n - \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} > \frac{n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \geq 1$, par conséquent φ est (strictement) croissante sur $\left\{0, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$.

- Il est alors immédiat que pour tout $k \in \left\{0, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$: $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$. Lorsque $k \in \left\{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \dots, n\right\}$,

$n-k$ est inférieur ou égal à $n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$, donc inférieur ou égal à $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Comme $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, il s'ensuit que

l'on a encore $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$: pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$.

2. Le plus simple est de discuter suivant la parité de n :

- Si n est pair, on pose $n = 2k$, et l'on a $\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = \binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2k)^{2k} e^{-2k} \sqrt{4\pi k}}{(k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k})^2}$

D'après la formule de Stirling, $\frac{(2k)!}{(k!)^2} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2k)^{2k} e^{-2k} \sqrt{4\pi k}}{(k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k})^2} = \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}}$, d'où :

$$\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \underset{n \rightarrow +\infty, n \text{ pair}}{\sim} \frac{2^n \sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}}.$$

- Pour n impair, $n = 2k+1$: $\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = \binom{2k+1}{k} = \binom{2k}{k} \frac{2k+1}{k+1}$, donc d'après ce qui précède,

$$\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \sim \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}} \cdot 2, \text{ soit } \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \sim \frac{2^n}{\sqrt{\pi \frac{n-1}{2}}}, \text{ on a donc également } \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \underset{n \rightarrow +\infty, n \text{ impair}}{\sim} \frac{2^n \sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Finalement :

$$\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}}.$$

Comme $\sqrt{\frac{2}{\pi}} < 1$, on en déduit que $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ est inférieur à $\frac{2^n}{\sqrt{n}}$ à partir d'un certain rang :

$$\boxed{\text{il existe un entier } n_0 \text{ tel que pour tout } n \geq n_0, \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}} \quad (1)}.$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, n\}$. Si $k = 0$, $\binom{n}{k} 2^{k-1} \leq n^k$ est l'évidence : $\frac{1}{2} \leq 1$. Si $k \geq 1$, on a :

$$\boxed{\binom{n}{k} 2^{k-1} = \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \dots \frac{n-k+1}{k} 2^{k-1} \leq n \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{k-1} 2^{k-1} = n^k}.$$

4. • Il est immédiat que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$: $\boxed{e_i = \frac{1}{2} (v - (v - 2 e_i))}$.

• Le vecteur v appartient à $\Omega_{1,n}$, puisque toutes ses coordonnées valent 1. Toutes les coordonnées de $v - 2 e_i$ sont égales à 1, sauf celle d'indice i , qui vaut -1 , ainsi $v - 2 e_i$ appartient lui aussi à $\Omega_{1,n}$; il découle alors de ce qui précède que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $e_i \in \text{Vect}(\Omega_{1,n})$. On en déduit que

$\text{Vect}(e_i, i \in \{1, \dots, n\}) \subset \text{Vect}(\Omega_{1,n})$, soit : $\mathbb{R}^n \subset \text{Vect}(\Omega_{1,n})$. L'inclusion réciproque étant évidente :

$$\boxed{\text{Vect}(\Omega_{1,n}) = \mathbb{R}^n}.$$

B Dimension 2

5. On a $\det(M^{(2)}) = M_{1,1} M_{2,2} - M_{1,2} M_{2,1}$, d'où par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(\det(M^{(2)})) = \mathbf{E}(M_{1,1} M_{2,2}) - \mathbf{E}(M_{1,2} M_{2,1}), \text{ puis, par indépendance des variables aléatoires } M_{i,j},$$

$$\mathbf{E}(\det(M^{(2)})) = \mathbf{E}(M_{1,1}) \mathbf{E}(M_{2,2}) - \mathbf{E}(M_{1,2}) \mathbf{E}(M_{2,1}).$$

Mais pour tout i, j , $\mathbf{E}(M_{i,j}) = 1 \cdot \mathbf{P}(M_{i,j} = 1) + (-1) \mathbf{P}(M_{i,j} = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. On en conclut que

$$\boxed{\mathbf{E}(\det(M^{(2)})) = 0}.$$

6. La variance de $\det(M^{(2)})$ est donnée par : $\mathbf{V}(\det(M^{(2)})) = \mathbf{E}\left(\left(\det(M^{(2)}) - \mathbf{E}(\det(M^{(2)}))\right)^2\right)$, d'où

$$\text{d'après Q5, } \mathbf{V}(\det(M^{(2)})) = \mathbf{E}\left(\left(\det(M^{(2)})\right)^2\right).$$

On a $\left(\det(M^{(2)})\right)^2 = M_{1,1}^2 M_{2,2}^2 + M_{1,2}^2 M_{2,1}^2 - 2 M_{1,1} M_{2,2} M_{1,2} M_{2,1}$. Les variables aléatoires $M_{i,j}$

étant à valeurs dans $\{-1, 1\}$, leurs carrés sont des variables certaines égales à 1, donc

$$\left(\det(M^{(2)})\right)^2 = 2 - 2 M_{1,1} M_{2,2} M_{1,2} M_{2,1}. \text{ Il en résulte que}$$

$$\mathbf{V}(\det(M^{(2)})) = 2 - 2 \mathbf{E}(M_{1,1} M_{2,2} M_{1,2} M_{2,1}), \text{ puis, à nouveau par indépendance, que}$$

$$\mathbf{V} \left(\det \left(M^{(2)} \right) \right) = 2 - \underbrace{2 \mathbf{E} \left(M_{1,1} \right) \mathbf{E} \left(M_{2,2} \right) \mathbf{E} \left(M_{2,1} \right) \mathbf{E} \left(M_{1,2} \right)}_{=0}.$$

On obtient comme désiré : $\boxed{\mathbf{V} \left(\det \left(M^{(2)} \right) \right) = 2}.$

Remarque

Il n'est pas très difficile de montrer que de manière générale : $\mathbf{E} \left(\det \left(M^{(n)} \right) \right) = 0$ et $\mathbf{V} \left(\det \left(M^{(n)} \right) \right) = n!$.

7. Le déterminant de $M^{(2)}$ est égal à 0 si et seulement si ses deux lignes $L_1^{(2)}$ et $L_2^{(2)}$ sont liées, donc, puisque tout le monde est à coefficients dans $\{-1, 1\}$, si et seulement si $L_1^{(2)}$ et $L_2^{(2)}$ sont égales ou opposées :

$$\mathbf{P} \left(\det \left(M^{(2)} \right) = 0 \right) = \mathbf{P} \left(\left(L_2^{(n)} = L_1^{(n)} \right) \cup \left(L_2^{(n)} = -L_1^{(n)} \right) \right), \text{ et par incompatibilité :}$$

$$\mathbf{P} \left(\det \left(M^{(2)} \right) = 0 \right) = \mathbf{P} \left(L_2^{(n)} = L_1^{(n)} \right) + \mathbf{P} \left(L_2^{(n)} = -L_1^{(n)} \right), \text{ ou encore, puisque } L_2^{(n)} \text{ et } -L_2^{(n)} \text{ suivent la même loi et sont indépendantes de } L_1^{(n)} : \mathbf{P} \left(\det \left(M^{(2)} \right) = 0 \right) = 2 \mathbf{P} \left(L_2^{(n)} = L_1^{(n)} \right).$$

On a donc $\mathbf{P} \left(\det \left(M^{(2)} \right) = 0 \right) = 2 \mathbf{P} \left(\left(M_{2,1} = M_{1,1} \right) \cap \left(M_{2,2} = M_{1,2} \right) \right)$, puis par indépendance :

$$\mathbf{P} \left(\det \left(M^{(2)} \right) = 0 \right) = 2 \mathbf{P} \left(M_{2,1} = M_{1,1} \right) \mathbf{P} \left(M_{2,2} = M_{1,2} \right).$$

Il est relativement immédiat que $\mathbf{P} \left(M_{2,1} = M_{1,1} \right) = \mathbf{P} \left(M_{2,2} = M_{1,2} \right) = \frac{1}{2}$, d'où finalement

$$\boxed{\mathbf{P} \left(\det \left(M^{(2)} \right) = 0 \right) = \frac{1}{2}}.$$

C Quelques bornes

8. Notons E_n l'événement : « $L_2^{(n)} = \pm L_1^{(n)}$ ». Comme en **Q7.**, on a $\mathbf{P} \left(E_n \right) = 2 \mathbf{P} \left(L_2^{(n)} = L_1^{(n)} \right)$, d'où :

$$\mathbf{P} \left(E_n \right) = 2 \mathbf{P} \left(\bigcap_{j=1}^n \left(M_{2,j} = M_{1,j} \right) \right) = 2 \prod_{j=1}^n \mathbf{P} \left(M_{2,j} = M_{1,j} \right) \text{ (par indépendance).}$$

A nouveau, $\mathbf{P} \left(M_{2,j} = M_{1,j} \right) = \frac{1}{2}$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Donc $\boxed{\mathbf{P} \left(E_n \right) = \frac{1}{2^{n-1}}}$.

Si les deux premières lignes de $M^{(n)}$ sont égales ou opposées, son déterminant est nul : $E_n \subset \left(\det \left(M^{(n)} \right) = 0 \right)$,

d'où $\boxed{\mathbf{P} \left(\det \left(M^{(n)} \right) = 0 \right) \geq \mathbf{P} \left(E_n \right) = 2^{1-n}}$ (si $n \geq 2$).

9. S'il existe $j \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $l_{j+1} \in \text{Vect} \left(\{l_1, \dots, l_j\} \right)$, les vecteurs $l_1, \dots, l_n$ sont évidemment liés.

Réciproquement, supposons la famille $(l_1, \dots, l_n)$ liée. Il existe alors n réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ non tous nuls et tels que

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k l_k = 0. \text{ Soit } j \text{ le plus grand entier de } \{0, \dots, n-1\} \text{ tel que } \alpha_{j+1} \neq 0 \text{ (un tel } j \text{ existe !). On a}$$

$$\sum_{k=1}^{j+1} \alpha_k l_k = 0 ; \text{ de plus, } j \text{ n'est pas égal à } 0 \text{ (sinon, on aurait } \alpha_1 l_1 = 0 \text{ avec } \alpha_1 \neq 0 \text{ et } l_1 \neq 0, \text{ bizarre).}$$

Donc $j \in \{1, \dots, n-1\}$, et, comme $\alpha_{j+1} \neq 0$, l'égalité $\sum_{k=1}^{j+1} \alpha_k l_k = 0$ peut s'écrire $l_{j+1} = \sum_{k=1}^{j+1} -\frac{\alpha_k}{\alpha_{j+1}} l_k$.

Ceci assure que $l_{j+1} \in \text{Vect}(\{l_1, \dots, l_j\})$, et achève d'établir l'équivalence demandée.

Les vecteurs aléatoires $L_1^{(n)}, \dots, L_n^{(n)}$ ne s'annulant pas, on peut appliquer ce qui précède, et en déduire que

$$\mathbf{P}(\det(M^{(n)}) = 0) = \mathbf{P}\left(\left((L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)}) \text{ est une famille liée}\right)\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} (L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)}))\right),$$

d'où par propriété de sous-additivité (ou inégalité de Boole) :

$$\mathbf{P}(\det(M^{(n)}) = 0) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{P}(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)})) \quad (2)$$

10. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-d})$ une base de $\mathcal{H}^\perp$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n-d\}$, on écrit ε_i dans la base canonique $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$

de $\mathbb{R}^n$, sous la forme : $\varepsilon_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} e_j = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n})$.

soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Le vecteur x appartient à $\mathcal{H}$ si et seulement si il appartient à $(\mathcal{H}^\perp)^\perp$, donc

si et seulement si : $\forall i \in \{1, \dots, n-d\}, \langle x, \varepsilon_i \rangle = 0$. Or $\langle x, \varepsilon_i \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} x_j = (\alpha_{i,1} \ \dots \ \alpha_{i,n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Il en résulte que $x \in \mathcal{H}$ si et seulement si :
$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-d,1} & \dots & \alpha_{n-d,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11. La famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-d})$, base de $\mathcal{H}^\perp$, est de rang $n-d$. La matrice $\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-d,1} & \dots & \alpha_{n-d,n} \end{pmatrix}$ est donc elle aussi

de rang $n-d$ (c'est la transposée de la matrice des coordonnées de la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-d})$ dans la base canonique

de $\mathbb{R}^n$). On sait alors que le système $\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-d,1} & \dots & \alpha_{n-d,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est équivalent (par lignes) à un système

$R \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, où $R \in \mathcal{M}_{n-d,n}(\mathbb{R})$ est échelonnée, réduite par lignes et de rang $n-d$. La matrice R possède

donc exactement d colonnes, d'indices $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$, sur lesquelles ne se trouve pas de coefficient pivot.

$x_{i_1}, \dots, x_{i_d}$ sont les inconnues secondaires du système ; on sait alors que, pour tout $(y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, il existe une

unique solution $x = (x_1, \dots, x_n)$ vérifiant $x_{i_1} = y_1, \dots, x_{i_d} = y_d$. Etre solution du système, c'est appartenir à $\mathcal{H}$,

par conséquent :

Pour tout $(y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, il existe un unique $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}$ tel que $x_{i_k} = y_k$ pour $k = 1, \dots, d$.

12. • D'après Q11. : il existe des indices $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$ vérifiant :

pour tout $y \in \Omega_{1,d}$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\left\{ L_1^{(n)} \in \mathcal{H}, L_{1,i_1}^{(n)} = y_1, \dots, L_{1,i_d}^{(n)} = y_d \right\} = \left\{ L_1^{(n)} = x \right\}$.

Cet évènement a pour probabilité 2^{-n} si $x \in \Omega_{1,n}$, et 0 sinon. Par sommation sur les 2^d éléments du système

complet d'évènements : $\left(\left\{ L_1^{(n)} \in \mathcal{H}, L_{1,i_1}^{(n)} = y_1, \dots, L_{1,i_d}^{(n)} = y_d \right\} \right)_{y \in \Omega_{1,d}}$, on en déduit que :

$$\boxed{\mathbf{P} \left(L_1^{(n)} \in \mathcal{H} \right) \leq 2^{d-n}}.$$

- Ce qui est vrai pour $L_1^{(n)}$ est également vrai pour tout $L_{j+1}^{(n)}$, $j = 1, \dots, n-1$: $\mathbf{P} \left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathcal{H} \right) \leq 2^{d-n}$.

En utilisant la formule des probabilités totales indiquée par l'énoncé :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect} \left(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)} \right) \right) \\ &= \sum_{l_1, \dots, l_j \in \Omega_{1,n}} \mathbf{P} \left(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect} \left(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)} \right) \mid L_1^{(n)} = l_1, \dots, L_j^{(n)} = l_j \right) \times \mathbf{P} \left(L_1^{(n)} = l_1, \dots, L_j^{(n)} = l_j \right) \\ &= \sum_{l_1, \dots, l_j \in \Omega_{1,n}} \mathbf{P} \left(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect} \left(l_1, \dots, l_j \right) \right) \times 2^{-nj}, \end{aligned}$$

et, comme $\text{Vect} \left(l_1, \dots, l_j \right)$ est de dimension inférieure ou égale à j , on obtient :

$$\boxed{\mathbf{P} \left(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect} \left(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)} \right) \right) \leq \sum_{l_1, \dots, l_j \in \Omega_{1,n}} 2^{j-n} \times 2^{-nj} = 2^{j-n}}.$$

13. On a $\dim \left(\left(\text{Vect} \left(l_i, 1 \leq i \leq q \right) \right)^\perp \right) = n - \dim \left(\text{Vect} \left(l_i, 1 \leq i \leq q \right) \right) \geq n - q > 0$, il existe donc déjà des vecteurs non nuls appartenant à $\left(\text{Vect} \left(l_i, 1 \leq i \leq q \right) \right)^\perp$. Pour $i \in \{1, \dots, q\}$, notons $l_i = (l_{i,1}, \dots, l_{i,n})$. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$x \in \left(\text{Vect} \left(l_i, 1 \leq i \leq q \right) \right)^\perp \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, q\}, \langle x, l_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, q\}, \sum_{j=1}^n x_j l_{i,j} = 0.$$

Ce système est à coefficients dans $\{-1, 1\} \subset \mathbb{Q}$; il est équivalent à un système échelonné et réduit par lignes à

coefficients dans $\mathbb{Q}$. Si l'on choisit les inconnues secondaires dans $\mathbb{Q}$ et non toutes nulles, on obtient donc une solution

$x = (x_1, \dots, x_n)$ de ce système (donc un élément de $\left(\text{Vect} \left(l_i, 1 \leq i \leq q \right) \right)^\perp$), non nul et à coordonnées dans $\mathbb{Q}$.

Posons pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i = \frac{p_i}{q_i}$, avec $p_i \in \mathbb{Z}$ et $q_i \in \mathbb{N}^*$. Alors le vecteur $\left(\prod_{i=1}^n q_i \right) x$ est non nul, à

coordonnées dans $\mathbb{Z}$, et c'est un élément de $\left(\text{Vect} \left(l_i, 1 \leq i \leq q \right) \right)^\perp$:

$$\boxed{\text{Il existe un vecteur non nul, orthogonal à } \text{Vect} \left(l_i, 1 \leq i \leq q \right), \text{ et qui est à coordonnées dans } \mathbb{Z}.$$

D Théorème de Erdős-Littlewood-Offord

14. On sait que, si l'on considère deux ensembles finis de même cardinal, dire que l'un de ces deux ensembles est inclus dans l'autre, revient à dire que ces deux ensembles sont égaux. Tous les éléments de $\mathcal{A}_k$ étant de même cardinal k , deux éléments distincts quelconques de $\mathcal{A}_k$ sont donc incomparables : $\mathcal{A}_k$ est une anti-chaîne.

De plus, le cardinal de $\mathcal{A}_k$ est égal à $\binom{n}{k}$, d'où d'après **Q1.** : $|\mathcal{A}_k| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, et d'après **Q2.** : il existe un entier n_0

$$\text{tel que si } n \geq n_0, |\mathcal{A}_k| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}}.$$

15. Les ensembles $\{1, \dots, |A|\}$ et A étant de même cardinal $|A|$, il existe $(|A|)!$ bijections de $\{1, \dots, |A|\}$ dans A .

De même, il existe $(n - |A|)!$ bijections de $\{|A| + 1, \dots, n\}$ dans A^c .

Construire un élément σ de S_A revient à choisir une bijection de $\{1, \dots, |A|\}$ dans A et une bijection de

$\{|A| + 1, \dots, n\}$ dans A^c , donc : le cardinal de S_A est égal à $(|A|)!(n - |A|)!$.

16. Quitte à échanger les rôles de A et B , on peut supposer que $|A| \leq |B|$. Raisonnons par l'absurde, en supposant que $S_A \cap S_B$ est non vide. Soit σ un élément de cette intersection. σ appartient à S_B , donc réalise une bijection de $\{1, \dots, |B|\}$ dans B : $B = \{\sigma(1), \dots, \sigma(|B|)\}$. De même, $A = \{\sigma(1), \dots, \sigma(|A|)\}$, et comme $|A| \leq |B|$, on a finalement $A = \{\sigma(1), \dots, \sigma(|A|)\} \subset \{\sigma(1), \dots, \sigma(|B|)\} = B$: A et B sont comparables. Ceci est absurde, puisque A et B sont distincts, et que $\mathcal{A}$ est une anti-chaîne. Ceci prouve que $S_A \cap S_B = \emptyset$.

17. Les ensembles S_A , $A \in \mathcal{A}$, sont deux à deux disjoints, donc : $\left| \bigcup_{A \in \mathcal{A}} S_A \right| = \sum_{A \in \mathcal{A}} |S_A|$, ce que l'on peut également

écrire sous la forme : $\left| \bigcup_{A \in \mathcal{A}} S_A \right| = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ |A|=k}} |S_A|$. On a donc, en utilisant le résultat de **Q15.** :

$$\left| \bigcup_{A \in \mathcal{A}} S_A \right| = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ |A|=k}} (|A|)!(n - |A|)! = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ |A|=k}} k!(n - k)! = \sum_{k=0}^n \alpha_k k!(n - k)!.$$

Or $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} S_A$ est un sous-ensemble de l'ensemble des bijections de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même, qui est de cardinal $n!$. Ainsi

$$\left| \bigcup_{A \in \mathcal{A}} S_A \right| \leq n!, \text{ d'où } \sum_{k=0}^n \alpha_k k!(n - k)! \leq n!, \text{ et, en divisant par } n!, \text{ on obtient : } \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

18. On a $|\mathcal{A}| = \sum_{k=0}^n \alpha_k$, donc $\frac{|\mathcal{A}|}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$, d'où d'après **Q1.**, $\frac{|\mathcal{A}|}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\binom{n}{k}}$. On déduit alors du

résultat de **Q17.** que $\frac{|\mathcal{A}|}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$, d'où $|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

19. Par hypothèse, l'ensemble A est strictement inclus dans l'ensemble B . On peut donc noter $A = \{i_1, \dots, i_p\}$ et

$B = \{i_1, \dots, i_q\}$, avec $p < q$, et des i_j deux à deux distincts. Alors :

$$s_B = \sum_{k=1}^q v_{i_k} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin \{i_1, \dots, i_q\}}}^n v_j = 2 \sum_{k=1}^q v_{i_k} - \sum_{j=1}^n v_j. \text{ de même, } s_A = 2 \sum_{k=1}^p v_{i_k} - \sum_{j=1}^n v_j. \text{ On a donc}$$

$$\boxed{s_B - s_A = 2 \sum_{k=p+1}^q v_{i_k} \geq 2}, \text{ car } \{p+1, \dots, q\} \text{ est non vide, et pour tout } k \in \{p+1, \dots, q\}, v_{i_k} \geq 1.$$

20. On lira avec intérêt le rapport du jury, pour savoir combien de candidats ont répondu correctement à cette question !

$$\text{Posons } \Theta_{J,n} = \left\{ \omega \in \Omega_{1,n}, \langle \omega, v \rangle \in J \right\} = \left\{ \omega \in \Omega_{1,n}, \sum_{\substack{i=1 \\ \omega_i=1}}^n v_i - \sum_{\substack{i=1 \\ \omega_i=-1}}^n v_i \in J \right\}. \text{ Soit}$$

$$\varphi : \begin{cases} \Omega_{1,n} & \rightarrow & \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}) \\ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) & \mapsto & \{i \in \{1, \dots, n\}, \omega_i = 1\} \end{cases}.$$

Il est clair que φ est une bijection : sa bijection réciproque est

$$\Psi : \begin{cases} \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}) & \rightarrow & \Omega_{1,n} \\ A \subset \{1, \dots, n\} & \mapsto & \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \text{ défini par } \omega_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in A \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}.$$

Posons ensuite $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}), \psi(A) \in \Theta_{J,n}\}$; on a donc :

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}), \sum_{\substack{i=1 \\ i \in A}}^n v_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin A}}^n v_i \in J \right\}, \text{ soit : } \mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}), s_A \in J\}.$$

Montrons que $\mathcal{A}$ est une anti-chaîne. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{A}$ distincts. Puisque s_A et s_B sont dans J , intervalle ouvert de longueur 2 : $|s_A - s_B| < 2$. D'après **Q19.**, A n'est pas inclus dans B et B n'est pas inclus dans A : $\mathcal{A}$ est bien une anti-chaîne.

Puisque $\Omega_{1,n}$ est muni de la mesure de probabilité uniforme, $\mathbf{P}\left(\langle L_1^{(n)}, v \rangle \in J\right) = \frac{|\Theta_{J,n}|}{|\Omega_{1,n}|} = 2^{-n} |\Theta_{J,n}|$, d'où par

bijektivité de φ , $\mathbf{P}\left(\langle L_1^{(n)}, v \rangle \in J\right) = 2^{-n} |\mathcal{A}|$. Comme $\mathcal{A}$ est une anti-chaîne, d'après **Q18.** : $|\mathcal{A}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, et,

$$\text{d'après } \mathbf{Q.2.}, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}} \text{ pour } n \text{ assez grand. Par suite, } \boxed{\mathbf{P}\left(\langle L_1^{(n)}, v \rangle \in J\right) = 2^{-n} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{1}{\sqrt{n}}}, \text{ la}$$

deuxième inégalité ayant lieu pour n assez grand.

Si l'on suppose seulement que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $|v_j| \geq 1$, on considère le vecteur aléatoire $L = (L_1, \dots, L_n)$,

où pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $L_j = \begin{cases} M_{1,j} & \text{si } v_j \geq 0 \\ -M_{1,j} & \text{sinon} \end{cases}$. On pose également $w = (|v_1|, \dots, |v_n|)$.

L suit la même loi que $L_1^{(n)}$ et toutes les coordonnées de w sont supérieures ou égales à 1, donc d'après ce qui précède,

$\mathbf{P}(\langle L, w \rangle \in J) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour n assez grand. Les produits scalaires $\langle L, w \rangle$ et $\langle L_1^{(n)}, v \rangle$ étant égaux,

$$\boxed{\text{l'inégalité } \mathbf{P}(\langle L_1^{(n)}, v \rangle \in J) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ reste vraie pour } n \text{ assez grand.}}$$

E Universalité

Il est curieux que l'énoncé se mette à noter $(\omega_{1,1}, \dots, \omega_{1,n})$ l'élément ω de $\Omega_{1,n}$ (qui, rappelons-le, a été identifié à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$). On continuera dans ce corrigé à utiliser plus simplement la notation $(\omega_1, \dots, \omega_n)$.

21. L'énoncé semble également confondre $\Omega_{1,k}$ et $\Omega_{1,n}$. On suppose qu'il s'agit de montrer que :

$$\left\{ \left\{ L_1^{(n)}, \dots, L_d^{(n)} \right\} \text{ non } k\text{-universel} \right\} \subset \bigcup_{\substack{(j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, n\}^k \\ j_1 < \dots < j_k}} \bigcup_{\omega \in \Omega_{1,k}} \bigcap_{i=1}^d \bigcup_{m=1}^k \left\{ M_{i, j_m} \neq \omega_m \right\}.$$

On va prouver qu'il y a en fait égalité. En passant à la négation de la définition d'un ensemble k -universel :

le sous-ensemble $\mathbf{V}$ de $\Omega_{1,n}$ est non k -universel si et seulement si il existe un k -uplet $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$,

et il existe $\theta \in \Omega_{1,n}$, tels que pour tout $v \in \mathbf{V}$: il existe $m \in \{1, \dots, k\}$ tel que $v_{j_m} \neq \theta_{j_m}$.

Autrement dit, en posant $\omega = (\theta_{j_1}, \dots, \theta_{j_k}) \in \Omega_{1,k}$:

$\mathbf{V}$ est non k -universel si et seulement si il existe un k -uplet $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$, et il existe $\omega \in \Omega_{1,k}$, tels que pour tout $v \in \mathbf{V}$: il existe $m \in \{1, \dots, k\}$ tel que $v_{j_m} \neq \omega_m$.

On prend $\mathbf{V} = \left\{ L_1^{(n)}, \dots, L_d^{(n)} \right\}$. La traduction ensembliste de « pour tout » est une intersection, celle de « il existe » une réunion, et l'on obtient :

$$\left\{ \left\{ L_1^{(n)}, \dots, L_d^{(n)} \right\} \text{ non } k\text{-universel} \right\} = \bigcup_{\substack{(j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, n\}^k \\ j_1 < \dots < j_k}} \bigcup_{\omega \in \Omega_{1,k}} \bigcap_{i=1}^d \bigcup_{m=1}^k \left\{ M_{i, j_m} \neq \omega_m \right\}.$$

22. Par propriété de sous-additivité, d'après le résultat de la question précédente :

$$\mathbf{P} \left(\left\{ L_1^{(n)}, \dots, L_d^{(n)} \right\} \text{ non } k\text{-universel} \right) \leq \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, n\}^k \\ j_1 < \dots < j_k}} \sum_{\omega \in \Omega_{1,k}} \mathbf{P} \left(\bigcap_{i=1}^d \bigcup_{m=1}^k \left\{ M_{i, j_m} \neq \omega_m \right\} \right).$$

Or, dans cette inégalité : $\mathbf{P} \left(\bigcap_{i=1}^d \bigcup_{m=1}^k \left\{ M_{i, j_m} \neq \omega_m \right\} \right) = \prod_{i=1}^d \mathbf{P} \left(\bigcup_{m=1}^k \left\{ M_{i, j_m} \neq \omega_m \right\} \right)$ (par indépendance),

d'où $\mathbf{P} \left(\bigcap_{i=1}^d \bigcup_{m=1}^k \left\{ M_{i, j_m} \neq \omega_m \right\} \right) = \prod_{i=1}^d \left(1 - \mathbf{P} \left(\bigcap_{m=1}^k \left\{ M_{i, j_m} = \omega_m \right\} \right) \right)$, puis, à nouveau par indépendance :

$$\mathbf{P} \left(\bigcap_{i=1}^d \bigcup_{m=1}^k \left\{ M_{i, j_m} \neq \omega_m \right\} \right) = \prod_{i=1}^d \left(1 - \prod_{m=1}^k \mathbf{P} \left(M_{i, j_m} = \omega_m \right) \right). \text{ Pour tout } i \text{ et pour tout } m,$$

$$\mathbf{P} \left(M_{i, j_m} = \omega_m \right) \text{ vaut } \frac{1}{2}, \text{ ainsi } \mathbf{P} \left(\bigcap_{i=1}^d \bigcup_{m=1}^k \left\{ M_{i, j_m} \neq \omega_m \right\} \right) = \prod_{i=1}^d \left(1 - \prod_{m=1}^k \frac{1}{2} \right) = \left(1 - 2^{-k} \right)^d, \text{ et :}$$

$$\mathbf{P} \left(\left\{ L_1^{(n)}, \dots, L_d^{(n)} \right\} \text{ non } k\text{-universel} \right) \leq \left(1 - 2^{-k} \right)^d \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, n\}^k \\ j_1 < \dots < j_k}} \sum_{\omega \in \Omega_{1,k}} 1.$$

On a $\sum_{\substack{(j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, n\}^k \\ j_1 < \dots < j_k}} 1 = \left| \left\{ (j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, n\}^k, j_1 < \dots < j_k \right\} \right| \times |\Omega_{1,k}|$. Or $|\Omega_{1,k}| = 2^k$;

d'autre part, choisir $(j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ tel que $j_1 < \dots < j_k$ revient à choisir k éléments distincts parmi $\{1, \dots, n\}$ (il y a ensuite une seule façon de les ranger dans l'ordre croissant) :

$$\left| \left\{ (j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, n\}^k, j_1 < \dots < j_k \right\} \right| = \binom{n}{k},$$

et l'on en conclut que $\mathbf{P} \left(\left\{ L_1^{(n)}, \dots, L_d^{(n)} \right\} \text{ non } k\text{-universel} \right) \leq \binom{n}{k} 2^k (1 - 2^{-k})^d$.

23. Une question technique comme on les aime...

D'après (4) : $\mathbf{P} \left(\left\{ \left\{ L_1^{(n)}, \dots, L_d^{(n)} \right\} \text{ non } k\text{-universel} \right\} \right) \leq \binom{n}{k} 2^k (1 - 2^{-k})^d$. Si l'on choisit $d \geq \frac{n}{2}$ et

$k \leq \ln n$, on a donc $\mathbf{P} \left(\left\{ \left\{ L_1^{(n)}, \dots, L_d^{(n)} \right\} \text{ non } k\text{-universel} \right\} \right) \leq \binom{n}{k} 2^k (1 - 2^{-\ln(n)})^{\frac{n}{2}}$ (les inégalités sont bien

dans le bon sens). La majoration $\binom{n}{k} 2^k \leq 2n^k \leq 2n^{\ln(n)}$ (obtenue en utilisant **Q3.**), donne déjà :

$$\mathbf{P} \left(\left\{ \left\{ L_1^{(n)}, \dots, L_d^{(n)} \right\} \text{ non } k\text{-universel} \right\} \right) \leq 2n^{\ln(n)} 2^{\ln(n)} (1 - 2^{-\ln(n)})^{\frac{n}{2}}.$$

On va montrer que $\mathbf{P} \left(\left\{ \left\{ L_1^{(n)}, \dots, L_d^{(n)} \right\} \text{ non } k\text{-universel} \right\} \right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (on aura alors

$\mathbf{P} \left(\left\{ \left\{ L_1^{(n)}, \dots, L_d^{(n)} \right\} \text{ non } k\text{-universel} \right\} \right) \leq \frac{1}{n}$ pour n assez grand). Pour cela, il suffit de prouver que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(n^{\ln(n)} 2^{\ln(n)} (1 - 2^{-\ln(n)})^{\frac{n}{2}} \right) = 0.$$

On pose donc $a_n = n \left(n^{\ln(n)} 2^{\ln(n)} (1 - 2^{-\ln(n)})^{\frac{n}{2}} \right)$, et l'on étudie la limite de $\ln(a_n)$: on a

$$\begin{aligned} \ln a_n &= \ln(n) + \ln^2(n) + \ln(2) \ln(n) + \frac{n}{2} \ln \left(1 - \underbrace{2^{-\ln(n)}}_{\rightarrow 0} \right) \\ &= \ln(n) + \ln^2(n) + \ln(2) \ln(n) - \frac{n}{2} 2^{-\ln(n)} + o\left(n 2^{-\ln(n)}\right). \end{aligned}$$

Or $2^{-\ln(n)} = e^{-\ln(2) \ln(n)} = n^{-\ln(2)}$. Par conséquent,

$$\ln a_n = \ln(n) + \ln^2(n) + \ln(2) \ln(n) - \frac{n^{1-\ln(2)}}{2} + o\left(n^{1-\ln(2)}\right),$$

et $1 - \ln(2) > 0$, d'où, par croissances comparées, $\ln a_n \sim -\frac{n^{1-\ln(2)}}{2}$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln a_n = -\infty$.

On a donc bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(n^{\ln(n)} 2^{\ln(n)} (1 - 2^{-\ln(n)})^{\frac{n}{2}} \right) = 0$, et l'on peut conclure :

si $d \geq \frac{n}{2}$ et $k \leq \ln n$, alors, pour n assez grand, $\mathbf{P} \left(\left\{ \left\{ L_1^{(n)}, \dots, L_d^{(n)} \right\} \text{ non } k\text{-universel} \right\} \right) \leq \frac{1}{n}$. (4)

24. Raisonnons par l'absurde : on suppose que v admet au plus k coordonnées non nulles ; il existe donc

$$1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \text{ tels que pour tout } i \in \{1, \dots, n\}, i \notin \{i_1, \dots, i_k\} : v_i = 0.$$

Soit $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_{1,n}$ défini par : $\forall j \in \{1, \dots, k\}, \omega_{i_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_{i_j} \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$, et par exemple pour tout

$i \notin \{i_1, \dots, i_k\}, \omega_i = 1$. Par propriété de k -universalité, il existe $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{V}$ tel que pour tout

$j \in \{1, \dots, k\}, u_{i_j} = \omega_{i_j}$. Alors $\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^k u_{i_j} v_{i_j}$, puisque les autres coordonnées de v sont nulles. Dans

cette somme, tous les termes sont positifs ; l'un au moins est non nul (car v est non nul, et car toutes les coordonnées de u sont non nulles). Ainsi $\langle u, v \rangle > 0$, ce qui est absurde puisque v est orthogonal à u .

Par conséquent, v possède au moins $k + 1$ coordonnées non nulles.

25. Si $L_1^{(n)} \in \text{Vect}(\mathbf{V})$, alors $L_1^{(n)}$ est orthogonal à tout élément de $\mathbf{V}^\perp$, donc en particulier à v ; ceci prouve déjà que

$$\mathbf{P}\left(L_1^{(n)} \in \text{Vect}(\mathbf{V})\right) \leq \mathbf{P}\left(\langle L_1^{(n)}, v \rangle = 0\right).$$

Notons $v_{i_1}, \dots, v_{i_p}$ les coordonnées non nulles de v (avec $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$, et, d'après Q24., $p \geq k + 1$)

Posons $L = (M_{1,i_1}, \dots, M_{1,i_p}) \in \Omega_{1,p}$, et $w = (v_{i_1}, \dots, v_{i_p})$. Alors $\left\{\langle L_1^{(n)}, v \rangle = 0\right\} = \left\{\langle L, w \rangle = 0\right\}$, d'où

$$\mathbf{P}\left(\langle L_1^{(n)}, v \rangle = 0\right) = \mathbf{P}\left(\langle L, w \rangle = 0\right). \text{ On pose } J =]-1, 1[, \text{ intervalle ouvert de longueur } 2 ; L \text{ et } w \text{ étant à}$$

coordonnées entières, $\mathbf{P}\left(\langle L, w \rangle = 0\right) = \mathbf{P}\left(\langle L, w \rangle \in J\right)$. Or d'après Q24. (les hypothèses nécessaires sont bien

réunies) : pour p assez grand, $\mathbf{P}\left(\langle L, w \rangle \in J\right) \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$. On a fait le tour : si k est assez grand, p l'est aussi, et :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(L_1^{(n)} \in \text{Vect}(\mathbf{V})\right) \leq \mathbf{P}\left(\langle L_1^{(n)}, v \rangle = 0\right) = \mathbf{P}\left(\langle L, w \rangle \in J\right) \leq p^{-\frac{1}{2}} \leq k^{-\frac{1}{2}}.} \quad (5)$$

26. • Par hypothèse, $\frac{t_n}{n} \rightarrow 0$, donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \frac{t_n}{n} \leq \varepsilon$.

En particulier, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \frac{t_n}{n} \leq \frac{1}{2}$. Alors, pour tout $n \geq n_0$:

$$\boxed{n - t_n = n \left(1 - \frac{t_n}{n}\right) \geq n \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}}. \text{ On suppose désormais } n \text{ assez grand pour que cette condition soit réalisée.}$$

L'indication proposée n'est pas tout à fait correcte, la notion de k -universalité n'ayant été définie que pour un sous-ensemble de $\Omega_{1,n}$.

On prend, comme conseillé, $k = \lfloor \ln n \rfloor$. Notons, pour $j \in \{1, \dots, n-1\}$, E_j l'événement « $\{L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)}\}$

est k -universel », et $\overline{E_j}$ son événement contraire. $(E_j, \overline{E_j})$ est évidemment un système complet d'événements, donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}\left(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)}\right)\right) &= \mathbf{P}_{E_j}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}\left(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)}\right)\right) \mathbf{P}\left(E_j\right) \\ &\quad + \mathbf{P}_{\overline{E_j}}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}\left(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)}\right)\right) \mathbf{P}\left(\overline{E_j}\right), \end{aligned}$$

d'où a fortiori : $\mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}\left(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)}\right)\right) \leq \mathbf{P}_{E_j}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}\left(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)}\right)\right) + \mathbf{P}\left(\overline{E_j}\right).$

Supposons maintenant que $j \in \{n - t_n + 1, \dots, n - 1\}$.

- On a $j \geq \frac{n}{2}$, et $k \leq \ln(n)$; on peut donc utiliser le résultat de **Q23.**, qui assure que, pour n suffisamment

grand, $\mathbf{P}(\overline{E_j}) \leq \frac{1}{n}$.

- Remarquons que $\text{Vect}(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)}) \neq \mathbb{R}^n$ (car $j < n$) : $\{L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)}\}^\perp$ contient donc un vecteur non nul.

On peut donc utiliser le résultat de **Q25.** : en choisissant n suffisamment grand, k est lui aussi suffisamment grand, et

l'on a $\mathbf{P}_{E_j}(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)})) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$. Ainsi (pour n assez grand) :

$$\begin{aligned} \sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} \mathbf{P}(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)})) &\leq \sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{n} \right) \\ &\leq \sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} \frac{2}{\sqrt{k}} = \frac{2(t_n - 1)}{\sqrt{\lfloor \ln n \rfloor}} \leq \frac{2t_n}{\sqrt{\ln(n) - 1}} \end{aligned}$$

Cela suffirait pour établir le théorème de Komlós, mais n'est pas tout à fait ce qui était demandé. Si l'on tient absolument à la majoration par $\frac{2t_n}{\sqrt{\ln n}}$, il faut affiner, et écrire par exemple que

$$\sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} \mathbf{P}(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)})) \leq \sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{n} \right) = \frac{t_n - 1}{\sqrt{k}} + \frac{t_n - 1}{n}, \text{ d'où}$$

$$\sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} \mathbf{P}(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)})) \leq t_n \left(\frac{1}{\sqrt{\ln(n) - 1}} + \frac{1}{n} \right). \text{ Comme}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\ln(n) - 1}} + \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{\ln n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right) : \text{ pour } n \text{ assez grand, } \frac{1}{\sqrt{\ln(n) - 1}} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{\sqrt{\ln n}}, \text{ et}$$

$$\sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} \mathbf{P}(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)})) \leq \frac{2t_n}{\sqrt{\ln n}} \quad (6). \text{ Ouf.}$$

F Théorème de Komlós

27. D'après (2), $0 \leq \mathbf{P}(\det(M^{(n)}) = 0) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{P}(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)}))$. Donc d'après (6), pour toute

suite croissante d'entiers $(t_n)_{n \geq 1}$ telle que $\frac{t_n}{n} \rightarrow 0$, on a pour n assez grand :

$$0 \leq \mathbf{P}(\det(M^{(n)}) = 0) \leq \sum_{j=1}^{n-t_n} \mathbf{P}(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)})) + \frac{2t_n}{\sqrt{\ln n}},$$

d'où, en utilisant l'inégalité (3) :

$$0 \leq \mathbf{P}(\det(M^{(n)}) = 0) \leq \sum_{j=1}^{n-t_n} 2^{j-n} + \frac{2t_n}{\sqrt{\ln n}} = 2^{1-t_n} - 2^{1-n} - \frac{2t_n}{\sqrt{\ln n}}.$$

On choisit la suite $(t_n)_{n \geq 1}$ telle que $t_n \rightarrow +\infty$ et $\frac{t_n}{\sqrt{\ln n}} \rightarrow 0$: par exemple, $t_1 = t_2 = 0$ et pour tout $n \geq 3$,

$$t_n = \lfloor \ln(\ln(n)) \rfloor \text{ (c'est bien une suite croissante d'entiers, vérifiant aussi } \frac{t_n}{n} \rightarrow 0 \text{)}.$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{1-t_n} - 2^{1-n} - \frac{2t_n}{\sqrt{\ln n}} = 0$. Par encadrement, on en déduit le théorème de Komlós :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\det \left(M^{(n)} \right) = 0 \right) = 0}.$$