

Partie I

1.

- 1.1 Question de cours
- 1.2 Question de cours
- 1.3 Question de cours

2.

2.1 D'après le cours, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, elle est diagonalisable et il existe une matrice $C \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $C^{-1}AC = D$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

2.2 On montre alors par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = CD^kC^{-1}$ et comme deux matrices semblables ont même trace,

$$\text{tr}(A^k) = \text{tr}(D^k). \text{ Or } \text{tr}(D^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \text{ et donc } \forall k \in \mathbb{N}, \text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k.$$

Partie II

$$\begin{aligned} 1. (X - a) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha^k X^{m-1-k} \right) &= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha^k X^{m-k} - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha^{k+1} X^{m-1-k} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m-1}}^{m-1} \alpha^k X^{m-k} - \sum_{l=1}^m \alpha^l X^{m-l} \text{ (changement d'indice } l = k + 1 \text{ dans la deuxième somme)} \\ &= X^m - \alpha^m \end{aligned}$$

On a donc : Pour tout entier naturel $m \geq 1$, $X^m - a^m = (X - a) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha^k X^{m-1-k} \right)$.

$$2. Q(X) = b_n \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k).$$

Par dérivation d'un produit, on obtient : $Q'(X) = \sum_{i=1}^n b_n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (X - \alpha_k) = \sum_{i=1}^n Q_i(X)$.

On a donc $Q' = \sum_{i=1}^n Q_i$.

$$\begin{aligned} 3. Q_i(X) &= \frac{Q(X) - Q(\alpha_i)}{X - \alpha_i} = \frac{\sum_{k=0}^n b_k X^k - \sum_{k=0}^n b_k \alpha_i^k}{X - \alpha_i} = \sum_{k=0}^n b_k \frac{X^k - \alpha_i^k}{X - \alpha_i} \\ &= \sum_{k=1}^n b_k \frac{X^k - \alpha_i^k}{X - \alpha_i} \text{ (car le terme d'indice 0 est nul)} \\ &= \sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=0}^{k-1} X^j \alpha_i^{k-j-1} \text{ (en utilisant la question 1.)} \\ &= \sum_{k=1}^n b_k \sum_{r=1}^k X^{r-1} \alpha_i^{k-r} \text{ (changement d'indice } r = j + 1) \\ &= \sum_{r=1}^n \sum_{k=r}^n b_k X^{r-1} \alpha_i^{k-r} \text{ (permutation des deux } \sum : \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^k a_{kr} = \sum_{r=1}^n \sum_{k=r}^n a_{kr}) \\ &= \sum_{r=1}^n \left(\sum_{k=r}^n b_k \alpha_i^{k-r} \right) X^{r-1} \end{aligned}$$

On a donc : $Q_i(X) = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{k=r}^n b_k \alpha_i^{k-r} \right) X^{r-1}$

4. D'après les questions 2 et 3, on a :

$$\begin{aligned} Q'(X) &= \sum_{r=1}^n r b_r X^{r-1} \text{ et} \\ Q'(X) &= \sum_{i=1}^n Q_i(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n \left(\sum_{k=r}^n b_k \alpha_i^{k-r} \right) X^{r-1} = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{k=r}^n b_k \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^{k-r} \right) \right) X^{r-1} = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{k=r}^n b_k T_{k-r} \right) X^{r-1} \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients du polynôme Q' , on obtient pour tout $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} rb_r &= \sum_{k=r}^n b_k T_{k-r} \\ &= \sum_{j=0}^{n-r} b_{r+j} T_j \quad (\text{changement d'indice } j = k - r) \end{aligned}$$

On a donc : $\forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket, rb_r = \sum_{j=0}^{n-r} b_{r+j} T_j.$

5. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Soit $r = n - k$. $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

D'après la question précédente :

$$(n-k)b_{n-k} = rb_r = \sum_{j=0}^{n-r} b_{r+j} T_j = \sum_{j=0}^k b_{n-k+j} T_j = \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-k+j} T_j + b_n T_k.$$

Donc $b_n T_k = (n-k)b_{n-k} - \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-k+j} T_j$, or Q est de degré exactement n et donc $b_n \neq 0$

et : $T_k = \frac{1}{b_n} \left((n-k)b_{n-k} - \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-k+j} T_j \right).$

6.

6.1 Soit $k \geq n$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Q(\alpha_i) = 0$. Donc :

$$0 = \sum_{i=1}^n Q(\alpha_i) \alpha_i^{k-n} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^n b_j \alpha_i^j \right) \alpha_i^{k-n} = \sum_{j=0}^n b_j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^{k-n+j} \right) = \sum_{j=0}^n b_j T_{k-n+j}$$

On a donc : $\sum_{j=0}^n b_j T_{k-n+j} = 0.$

6.2 D'après la question précédente, $0 = \sum_{j=0}^{n-1} b_j T_{k-n+j} + b_n T_k$ et donc, comme $b_n \neq 0$:

$T_k = -\frac{1}{b_n} \sum_{j=0}^{n-1} b_j T_{k-n+j}.$

7. On peut donc calculer les termes de la suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à partir des coefficients du polynôme Q .

Partie III

1. Le système (Σ) peut se réécrire :

$$\begin{cases} u_1 = -S_1 \\ u_1 S_1 + 2u_2 = -S_2 \\ u_1 S_2 + u_2 S_1 + 3u_3 = -S_3 \\ \dots\dots\dots \\ u_1 S_{n-1} + u_2 S_{n-2} + \dots + u_{n-1} S_1 + nu_n = -S_n \end{cases}$$

Sa matrice est triangulaire inférieure, les éléments diagonaux sont $1, 2, \dots, n$, non nuls, la matrice est donc inversible et donc:

Le système (Σ) possède une unique solution dans \mathbb{R}^n .

2. $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

Les relations coefficients racines donnent :

$$a_{n-1} = -\sum_{i=1}^n \lambda_i = -S_1 \text{ et } a_{n-2} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) = \frac{1}{2} (S_1^2 - S_2).$$

Du système (Σ) , on tire $u_1 = -S_1 = a_{n-1}$ et $u_2 = \frac{1}{2} (-u_1 S_1 - S_2) = \frac{1}{2} (S_1^2 - S_2) = a_{n-2}$ et donc :

$u_1 = a_{n-1}$ et $u_2 = a_{n-2}.$

3. Dans la partie II, on a $\prod_{i=1}^n (X - \alpha_i) = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{b_n} X^k$ et $T_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k$ et en II.4. on a montré que :

$$\forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket, r b_r = \sum_{j=0}^{n-r} b_{r+j} T_j.$$

En remplaçant α_i par λ_i et T_i par S_i (en posant $S_0 = n$) et en posant $a_k = \frac{b_k}{b_n}$ on obtient :

$$\forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket, r a_r = \sum_{j=0}^{n-r} a_{r+j} S_j.$$

On pose alors $k = n - r : \forall k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, (n - k) a_{n-k} = \sum_{j=0}^k a_{n-k+j} S_j.$

(pour $k = 0$, la relation est sans intérêt)

Or $a_n = 1$ et $S_0 = n$, donc : $\forall k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, (n - k) a_{n-k} = \sum_{j=1}^{k-1} a_{n-k+j} S_j + n a_{n-k} + S_k$

et $\forall k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, 0 = S_k + \sum_{j=1}^{k-1} a_{n-k+j} S_j + k a_{n-k}$

Pour $k = 1$, on obtient $S_1 + a_{n-1} = 0$.

Pour $k \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket$, on obtient $0 = S_k + a_{n-1} S_{k-1} + a_{n-2} S_{k-2} + \dots + a_{n-k+1} S_1 + k a_{n-k}$.

$(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0)$ est donc bien solution du système (Σ) .

4. On a vu en 1. que (Σ) possède une unique solution. $(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0)$ et (u_1, u_2, \dots, u_n) sont solutions de (Σ) donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k = a_{n-k}.$$

Partie IV

1. P est le polynôme caractéristique de la matrice A . D'après le théorème de Cayley Hamilton, on a donc : $P(A) = O_n$.

2. $a_0 = P(0) = (-1)^n \det(A)$ (terme constant du polynôme caractéristique).

Donc : A inversible $\iff a_0 \neq 0$.

3. $P(A) = O_n$ donc $A^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k = 0$ ce que l'on peut réécrire : $A \left(A^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{k-1} \right) + a_0 I_n = 0$

Si $a_0 \neq 0$, alors $A^{-1} = -\frac{1}{a_0} \left(A^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{k-1} \right)$ et donc :

La matrice A^{-1} , si elle existe, s'écrit comme un polynôme en A .

4.

4.1 Montrons par récurrence que l'on a $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, B_k = A^k + \sum_{i=1}^k d_i A^{k-i}$.

• Pour $k = 1$, $B_1 = A + d_1 I_n$, la relation est donc vraie.

• Supposons que pour un entier $k \geq 1$ donné, $B_k = A^k + \sum_{i=1}^k d_i A^{k-i}$

Par définition : $B_{k+1} = B_k A + d_{k+1} I_n$. On a donc :

$$B_{k+1} = \left(A^k + \sum_{i=1}^k d_i A^{k-i} \right) A + d_{k+1} I_n = A^{k+1} + \sum_{i=1}^k d_i A^{k+1-i} + d_{k+1} I_n = A^{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} d_i A^{k+1-i}$$

• D'après le principe de récurrence, la relation est donc vraie pour tout $k \geq 1$

On a bien : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, B_k = A^k + \sum_{i=1}^k d_i A^{k-i}$.

4.2 $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, d_k = -\frac{1}{k} \text{tr}(B_{k-1} A) = -\frac{1}{k} \text{tr} \left(\left(A^{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} d_i A^{k-1-i} \right) A \right) = -\frac{1}{k} \text{tr} \left(A^k + \sum_{i=1}^{k-1} d_i A^{k-i} \right)$

$= -\frac{1}{k} \left(\text{tr}(A^k) + \sum_{i=1}^{k-1} d_i \text{tr}(A^{k-i}) \right)$ (linéarité de la trace)

On a donc : $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, d_k = -\frac{1}{k} \left(\text{tr}(A^k) + \sum_{i=1}^{k-1} d_i \text{tr}(A^{k-i}) \right)$.

4.3

4.3a D'après la question **I.2.2** $\text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = S_k$.

On a donc $S_1 + d_1 = 0$ par définition de (d_k) et la formule trouvée à la question précédente peut se réécrire :
 $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, S_k + d_1 S_{k-1} + d_2 S_{k-2} + \dots + d_{k-1} S_1 + k d_k = 0$.
 (d_1, d_2, \dots, d_n) est donc solution du système (Σ) et par unicité de la solution de (Σ) ,

on a donc : $\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, d_k = a_{n-k}}$.

4.3b $B_{n-1} = A^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} d_i A^{n-1-i} = A^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i} A^{n-1-i} = A^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{k-1}$. (changement d'indice $k = n - i$)

En utilisant la formule trouvée en **IV.3.**, on obtient : $\boxed{B_{n-1} = -a_0 A^{-1} = (-1)^{n+1} \det(A) A^{-1}}$.

4.3c $B_n = A^n + \sum_{i=1}^n d_i A^{n-i} = A^n + \sum_{i=1}^n a_{n-i} A^{n-i} = P(A) = O_n$ (Car P est le polynôme caractéristique de A). On a donc $\boxed{B_n = O_n}$.

5. Calculons d_1, d_2, d_3 et d_4 les coefficients du polynôme caractéristique de A .

$$a_3 = d_1 = -\text{tr}(A) = -1, B_1 = A + d_1 I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$a_2 = d_2 = -\frac{1}{2} \text{tr}(B_1 A) = -7, B_2 = B_1 A + d_2 I_4 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$a_1 = d_3 = -\frac{1}{3} \text{tr}(B_2 A) = 1, B_3 = B_2 A + d_3 I_4 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$a_0 = d_4 = -\frac{1}{4} \text{tr}(B_3 A) = 8.$$

Le polynôme caractéristique de A est donc $X^4 - X^3 - 7X^2 + X + 8$.

$$B_3 = -a_0 A^{-1} \text{ donc } A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. 6.1 fonction1 prend en argument deux matrices carrées A et B et retourne leur produit AB .
fonction2 prend en argument un réel x et un entier n et retourne la matrice xI_n .
fonction3 prend en argument une matrice carrée A et retourne $\text{tr}(A)$.
fonction4 prend en argument une matrice carrée A et un réel x et retourne la matrice xA .
fonction5 prend en argument deux matrices carrées A et B et retourne leur somme $A + B$.

```

6.2 1 d=[1]
      2 A=[[1,0,-1,1],[0,0,0,2],[-1,0,-1,0],[1,2,0,1]]
      3 n=len(A)
      4 dk=-fonction3(A)
      5 B=fonction5(A,fonction2(dk,n))
      6 d.append(dk)
      7 for k in range(2,n+1):
      8     C=fonction1(B,A)
      9     dk=-1/k*fonction3(C)
     10     B=fonction5(C,fonction2(dk,n))
     11     d.append(dk)
     12 print("Les coefficients du polynôme caractéristique, dans l'ordre décroissants
           des puissances sont :",d)

```