

Concours Communs Polytechniques - Session 2012

Corrigé de l'épreuve de mathématiques 1 Filière MP

Normes, fonctions définies par une intégrale, intégrales curvilignes et séries de fonctions

Corrigé par M.TARQI-http://alkendy.x10.mx

EXERCICE 1 : NORMES ÉQUIVALENTES

1. (a) On a $\|0\| = 0$. Soit $f \in E$ tel que $\|f\| = 0$, alors $|f(0)| = \int_0^1 |f'(t)|dt = 0$ et comme $|f'|$ est continue et positive sur $[0, 1]$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, $f'(t) = 0$ et donc f est constante, or $f(0) = 0$, donc f est nulle sur $[0, 1]$.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, on a :

$$\|\lambda f\| = |\lambda f(0)| + 2 \int_0^1 |\lambda f'(t)|dt = |\lambda|(|f(0)| + 2 \int_0^1 |f'(t)|dt) = |\lambda|\|f\|.$$

Enfin si f et g sont dans E , on a :

$$\begin{aligned}\|f + g\| &= |(f + g)(0)| + 2 \int_0^1 |(f + g)(t)|dt \\ &\leq |f(0)| + 2 \int_0^1 |f(t)|dt + |g(0)| + 2 \int_0^1 |g(t)|dt = \|f\| + \|g\|.\end{aligned}$$

Conclusion : $\|\cdot\|$ est bien une norme sur E .

- (b) i. Deux normes N et N' sur E sont dites équivalentes s'il existe deux nombres réels $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \quad k_1 N'(x) \leq N(x) \leq k_2 N'(x).$$

- ii. On vérifie facilement que, pour tout $f \in E$, $\frac{1}{2}\|f\|' \leq \|f\| \leq 2\|f\|'$, donc les deux normes sont équivalentes.

2. Les applications suivantes :

$$f \mapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt, \quad f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

définissent des normes sur E , mais ils ne sont pas équivalentes, en effet, en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = n(1 - nx)$ si $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ et 0 si $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, on a $\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = 2n$, donc $\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1}$ n'est pas bornée.

EXERCICE 2 : CONTINUITÉ D'UNE FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE

1. Soit g est une application continue de $I \times J$ dans $\mathbb{R}$ telle que , pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ soit intégrable sur J , et φ une fonction positive intégrable sur J . Alors si pour tout $(x, t) \in A \times I$, $|g(x, t)| \leq \varphi(t)$, la fonction

$$f : x \mapsto \int_J g(x, t)dt$$

définit une fonction continue sur I .

2. La fonction $(x, t) \mapsto g(x, t) = \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}$ vérifie les hypothèses de la question précédente avec $I = \mathbb{R}$, $J = [0, +\infty[$ et $\varphi(x, t) = \frac{\pi}{2(1+t^2)}$, donc f_1 est continue sur $\mathbb{R}$
3. $f_2(0) = 0$ et si $x > 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty} x e^{-xt} dt = [-e^{-xt}]_0^{+\infty} = 1$. Donc $f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$, fonction qui n'est pas continue à droite en 0. L'hypothèse de domination est donc nécessaire.

EXERCICE 3 : UNE INTÉGRALE CURVILIGNE

En coordonnées polaires, en posant $x = \cos t$ et $y = \sin t$, l'intégrale curviligne devient :

$$\int_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \int_0^{2\pi} [\cos t(\cos t) - \sin t(-\sin t)] dt = 2\pi.$$

PROBLÈME : COMPARAISON DE CONVERGENCES

PARTI I

- (a) La série $\sum f_n$ est normalement convergente sur I si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty}$ est convergente, où $\|f_n\|_{\infty} = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$.
- (b) Pour tout $x \in I$, on a $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{\infty}$ et comme la série $\sum \|f_n\|_{\infty}$ converge, donc elle est de même de la série $\sum |f_n(x)|$.
- Pour tout $x \in I$, on a :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty}$$

qui est le reste d'une série convergente, et donc tend vers 0, et ceci indépendamment de x , donc la convergence est uniforme.

- Soit $x \in [0, 1]$ fixé. La suite $\left(\frac{x^2 + n}{n^2} \right)_{n \geq 1}$ est décroissante, positive et tend vers 0, donc la série alternée $\sum (-1)^n \left(\frac{x^2 + n}{n^2} \right)$ est convergente, d'après le critère spécial des séries alternées.

Toujours d'après le théorème des séries alternées, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \left| (-1)^{n+1} \frac{x^2 + n + 1}{(n + 1)^2} \right| \leq \frac{n + 2}{(n + 1)^2}$$

Inégalité qui montre que la série $\sum (-1)^n \left(\frac{x^2 + n}{n^2} \right)$ est uniformément convergente sur $[0, 1]$.

Pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|f_n(x)| = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n}$$

Donc la série $\sum |f_n(x)|$ converge si et seulement si la série $\sum \frac{1}{n}$ converge, donc la série $\sum f_n(x)$ n'est pas absolument convergente.

4. Pas nécessairement, par exemple, la série $\sum x^n(1-x)$ converge absolument sur $[0, 1[$ (vers 1), mais ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$, car pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(x) = x^{n+1}$, donc $\sup_{x \in [0, 1[} |R_n(x)| = 1$ ne tend pas vers 0.

PARTIE II

On désigne par $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x \in [0, 1[$ la suite des restes partielles associée à $\sum \alpha_n x^n(1-x)$, c'est une suite à termes positifs.

5. La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant décroissante et positive, donc minorée et comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \leq u_0$, la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc bornée.
Soit $M = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |\alpha_n|$. Pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|f_n(x)| \leq (1-x)Mx^n.$$

La série géométrique $\sum x^n$ étant convergente ($x \in [0, 1[$), donc par comparaison, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente, donc elle est convergente.

6. (a) Pour tout $x \in [0, 1]$, $f'_n(x) = \alpha_n x^{n-1}(n - (n+1)x)$, donc le sup est atteint en $x_n = \frac{n}{n+1}$ et sa valeur est $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \alpha_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.
(b) On a $\|f_n\|_\infty \sim \frac{1}{e} \frac{\alpha_n}{n}$, donc la série $\sum f_n$ est normalement convergente si et seulement si la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente ou encore si et seulement si la série numérique $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ est convergente.

7. (a) Pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = x^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

(b) Pour tout $x \in I$, on a l'inégalité :

$$|R_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k x^k (1-x) \leq \alpha_{n+1} x^{n+1} \leq \alpha_{n+1}.$$

Cette inégalité montre que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, 1[$.

- (c) Pour tout $x \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^{k+1} \\
&= \alpha_{n+1} x^{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) x^k \\
&\geq \alpha_{n+1} x^{n+1},
\end{aligned}$$

car $\alpha_k \leq \alpha_{k-1}$, donc $0 \leq \alpha_{n+1} \leq \sup_{x \in [0,1[} |R_n(x)|$ et donc la convergence uniforme de la série

$\sum f_n$, entraîne la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers 0.

8. (a) La série $\sum \frac{x^n}{n^2} (1-x)$ converge normalement sur $[0, 1[$ ($\alpha_n = \frac{1}{n^2}$), car pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq \frac{x^n(1-x)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

(b) La série $\sum x^n (1-x)$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$ ($\alpha_n = 1$), car pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(x) = x^{n+1}$, donc $\sup_{x \in [0,1[} |R_n(x)| = 1$ ne tend pas vers 0.

(c) La série $\sum \frac{x^n}{\ln(n+1)} (1-x)$ converge uniformément mais ne converge pas normalement sur $[0, 1[$. ($\alpha_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$), car $\|f_n\|_\infty \sim \frac{e^{-1}}{n \ln(n)}$, c'est le terme général d'une série divergente, série de Bertrand !, cependant elle converge uniformément sur $[0, 1[$ d'après la question 7.b.

9. Les différentes implications possibles :

