
Mathématiques

Durée : 3 heures. Coefficient : 3
Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Soient deux nombres réels strictement positifs a et b , ainsi que les matrices :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\mathcal{E} = \{\alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{I} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ et donner sa dimension en justifiant la réponse.
2. Montrer que la matrice \mathbf{K} admet trois valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ que l'on calculera.
3. La matrice \mathbf{K} est-elle diagonalisable ? Justifier.
4. (a) Déterminer le sous espace vectoriel propre \mathcal{U}_1 associé à la valeur propre λ_1 . Donner u_1 le vecteur propre de \mathcal{U}_1 dont la première composante vaut \sqrt{a} .
(b) Déterminer le sous espace vectoriel propre \mathcal{U}_2 associé à la valeur propre λ_2 . Donner u_2 le vecteur propre de \mathcal{U}_2 dont la deuxième composante vaut 1.
(c) Déterminer le sous espace vectoriel propre \mathcal{U}_3 associé à la valeur propre λ_3 . Donner u_3 le vecteur propre de \mathcal{U}_3 dont la première composante vaut \sqrt{a} .
5. Montrer qu'il existe une matrice \mathbf{P} inversible et une matrice diagonale \mathbf{D} telles que $\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$. Donner \mathbf{P} et \mathbf{D} .
6. Pour i valant 1 ou 2 ou 3, montrer que les vecteurs propres u_i de \mathbf{K} associés aux valeurs propres λ_i sont aussi vecteurs propres de la matrice $\mathbf{M} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{I}$ associés aux valeurs propres μ_i que vous exprimerez en fonction de α, β, λ_i .
7. (a) Montrer que toute matrice $\mathbf{M} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{I}$ est diagonalisable et donner une matrice diagonale Δ semblable à \mathbf{M} .
(b) Montrer que $\mathbf{M} = \mathbf{P}\Delta\mathbf{P}^{-1}$ avec le même \mathbf{P} qu'à la question 5.
8. On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Utiliser ce qui précède pour déterminer une matrice Δ et une matrice \mathbf{Q} inversible telles que $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Delta\mathbf{Q}^{-1}$.
9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner l'expression de la puissance n -ième \mathbf{A}^n de \mathbf{A} .

Exercice 2

Partie I

Soit n un entier naturel non nul.

1. Exprimer $e^{in\pi}$ à l'aide d'une puissance de -1 .

- On pose pour tout entier naturel p , $I_{p,n} = \int_0^\pi t^p e^{int} dt$. Montrer que $I_{0,n} = \frac{-((-1)^n - 1)i}{n}$.
- Montrer que $\forall (p, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $I_{p,n} = \frac{i(-1)^{n+1}\pi^p}{n} + \frac{ip}{n} I_{p-1,n}$.
- Soient quatre nouvelles intégrales définies respectivement par :

$$C_{1,n} = \int_0^\pi t \cos(nt) dt, S_{1,n} = \int_0^\pi t \sin(nt) dt, C_{2,n} = \int_0^\pi t^2 \cos(nt) dt, S_{2,n} = \int_0^\pi t^2 \sin(nt) dt.$$

(a) Calculer $I_{1,n} = \int_0^\pi t e^{int} dt$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, C_{1,n} = \frac{(-1)^n - 1}{n} \text{ et } S_{1,n} = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}.$$

(b) Calculer $I_{2,n} = \int_0^\pi t^2 e^{int} dt$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, C_{3,n} = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} \text{ et } S_{2,n} = \frac{2}{n^3} ((-1)^n - 1) - \frac{(-1)^n \pi^2}{n}.$$

Partie II

Soit une fonction f **impair**, continue et 2π -périodique sur \mathbb{R} définie sur $]0, \pi[$ par : $f(t) = \pi t - t^2$.

- Représenter la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
- Déterminer la série de Fourier de f . Préciser la valeur des termes d'indice pair et des termes d'indice impair.
- Etudier la convergence de la série de Fourier et donner sa somme.
- (a) Énoncer la relation de Parseval.
 (b) Appliquer la relation de Parseval à la fonction f et en déduire la valeur de : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$.
- (c) Soit $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$. Trouver une expression de T de la forme $T = S + bT$. En déduire la valeur de T .

Exercice 3

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe \mathcal{C} de représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$ avec $t \in]-\pi; \pi]$. On note $M(t)$ le point de la courbe \mathcal{C} associé au paramètre t .

- Soit $M(t)$ un point de \mathcal{C} . Préciser par quelle transformation géométrique on obtient à partir de $M(t)$ les trois points suivants :

$$\text{a) } M(-t) \quad \text{b) } M(\pi - t) \quad \text{c) } M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

En déduire l'intervalle le plus petit possible $I = [0; \alpha]$ tel que si \mathcal{C}_0 est la restriction de \mathcal{C} obtenue pour $t \in I$, on peut obtenir tout \mathcal{C} par des transformations géométriques successives (dont on précisera la nature et l'ordre) appliquées à \mathcal{C}_0 .

2. Faire un tableau de variation conjoint de $(x(t), y(t))$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

En déduire la représentation graphique de \mathcal{C}_0 , puis de \mathcal{C} que l'on donnera sur la copie.

3. Montrer que le vecteur \vec{t} de composantes $(-\cos(t), \sin(t))$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point $M(t)$. Donner les composantes d'un vecteur \vec{n} orthogonal à \vec{t} .

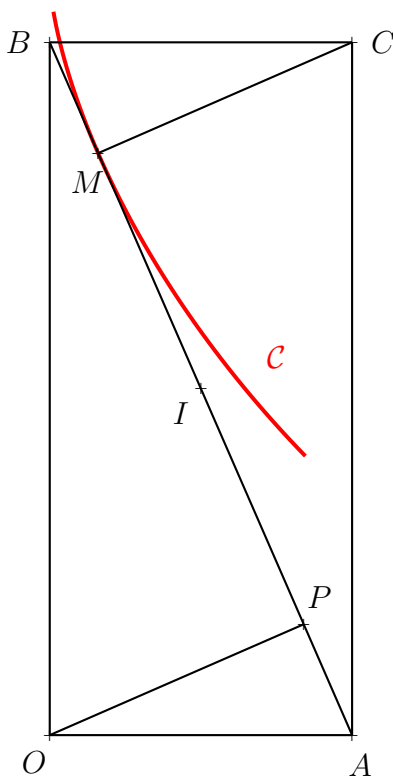
En déduire qu'une équation de la tangente T au point $M(t)$ de la courbe \mathcal{C} est

$$X \sin(t) + Y \cos(t) = \sin(t) \cos(t)$$

4. Pour $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, donner les coordonnées de $A(t)$ point d'intersection de T avec l'axe $(x'x)$ et de $B(t)$ point d'intersection de T avec l'axe $(y'y)$.

[On posera $A(0) = (1, 0), B(0) = (0, 0), A\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 0), B\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$.]

Que peut-on dire de la distance $A(t)B(t)$?



5. Pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, avec $A = A(t), B = B(t)$ soit $C = C(t)$ tel que $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$. [(OACB) est un rectangle].

Montrer que la projection orthogonale de C sur (AB) est $M(t)$.

6. Montrer que la projection orthogonale de l'origine O sur (AB) est $P = P(t) = (\cos(t) \sin^2(t), \cos^2(t) \sin(t))$ et que le milieu I de $[MP]$ est le centre du rectangle $(OACB)$.

7. On se propose de représenter graphiquement la courbe \mathcal{Q} de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} X(t) = \cos(t) \sin^2(t) \\ Y(t) = \cos^2(t) \sin(t) \end{cases} \text{ avec } t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Donner les coordonnées de $P(0), P\left(\frac{\pi}{4}\right), P\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ainsi que la direction des vecteurs tangents à \mathcal{Q} en ces points..

8. Pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, montrer que l'angle $\widehat{OA, OP(t)}$ a pour mesure $\theta = \frac{\pi}{2} - t$.

9. Pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, calculer la longueur $OP(t)$ en fonction de θ .

En déduire l'équation de \mathcal{Q}_0 (\mathcal{Q} restreinte à $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$) en coordonnées polaires.

10. En déduire la représentation graphique de \mathcal{Q}_0 que l'on donnera sur la copie.

On représentera \mathcal{Q} en utilisant, et en les justifiant, les mêmes transformations géométriques qu'au 1.