

**Corrigé de l'épreuve Mathématiques, Centrale II, 2025, filière PC.
Version provisoire du 05/05/2025**

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.

Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

Partie A - Préliminaires

Q1. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction sin,

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, |\sin(s) - \sin(t)| \leq \sup_{\mathbb{R}} |\cos| |s - t| \leq |s - t|.$$

Pour $|s - t| \leq h$, il vient

$$|\sin(s) - \sin(t)| \leq h$$

et par passage à la borne supérieure sur tous les couples (t, s) vérifiant $|s - t| \leq h$, on en déduit que $\omega_{\sin}(h) \leq h$.

Q2. (a) Soit

$$K_h = \{(t, s) \in [0, 2\pi], |s - t| \leq h\}.$$

Par 2π -périodicité de g ,

$$\omega_h(g) = \sup_{(t,s) \in K_h} |g(t) - g(s)| \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Or, d'après le théorème des bornes atteintes, la fonction continue $(s, t) \mapsto |g(t) - g(s)|$ est bornée sur le compact K_h donc

$$\omega_h(g) = \sup_{(t,s) \in K_h} |g(t) - g(s)| = \max_{(t,s) \in K_h} |g(t) - g(s)| \in \mathbb{R}^+ \text{ est bien défini.}$$

(b) La fonction g' est continue et 2π -périodique sur \mathbb{R} , donc d'après le théorème des bornes atteintes,

$$\|g'\|_{\infty} = \sup_{[0, 2\pi]} |g'| \in \mathbb{R}^+ \text{ est bien défini.}$$

Comme en (1), le théorème des accroissements finis implique que

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, |g(s) - g(t)| \leq \sup_{\mathbb{R}} |g'| |s - t| = \|g'\|_{\infty} |s - t|$$

puis que $0 \leq \omega_g(h) \leq \|g'\|_{\infty} h$.

Par domination, on en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$.

Q3. (a) Comme $h \leq h'$,

$$\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid |t - s| \leq h\} \subset \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid |t - s| \leq h'\}$$

et donc $\omega_g(h) \leq \omega_g(h')$.

(b) Soient (t, s) tel que $|t - s| \leq h + h'$. Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$t \leq s \leq t + h + h' \text{ et } h \leq h'.$$

Par inégalité triangulaire,

$$|g(t) - g(s)| = |g(t) - g(t+h) + g(t+h) - g(s)| \leq |g(t) - g(t+h)| + |g(t+h) - g(s)|.$$

Comme $|t - (t+h)| \leq h$, on a $|g(t) - g(t+h)| \leq \omega_g(h)$.

De plus $-h \leq s - (t+h) \leq h'$ donc $|s - (t+h)| \leq h'$ et donc $|g(t+h) - g(s)| \leq \omega_g(h')$.

On en déduit que

$$|t - s| \leq h + h' \Rightarrow |g(t) - g(s)| \leq |g(t) - g(t+h)| + |g(t+h) - g(s)| \leq \omega_g(h) + \omega_g(h')$$

et par passage au sup sur tous les couples (t, s) vérifiant $|t - s| \leq h + h'$, il vient

$$\boxed{\omega_g(h + h') \leq \omega_g(h) + \omega_g(h')}.$$

(c) L'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \omega_g(nh) \leq n\omega_g(h)$$

est immédiate par récurrence sur n à l'aide de (b) (à rédiger par le candidat !).

Pour $\lambda > 0$, on a par (a) et ce qui vient d'être fait,

$$\boxed{\omega_g(\lambda h) \leq \omega_g((\lfloor \lambda \rfloor + 1)h) \leq (\lfloor \lambda \rfloor + 1)\omega_g(h) \leq (\lambda + 1)\omega_g(h)}.$$

Q4. Soit G une primitive de g et soit

$$H : x \mapsto G(x + \pi) - G(x - \pi).$$

La fonction H est de classe \mathcal{C}^1 et

$$\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = g(x + \pi) - g(x - \pi) = 0.$$

La fonction H est donc constante égale à $H(0)$, ce qui montre que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \int_{x-\pi}^{x+\pi} g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt}.$$

Q5. L'application Δ est bien définie et est linéaire. Reste à vérifier que pour tout $p \in \mathcal{T}_n$, $p \in \mathcal{T}_n$ et il suffit de le faire pour $p_k : x \mapsto e^{ikx}$ avec $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Delta(p_k)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)} g(t) dt = e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} g(t) dt = \lambda_k p_k(x) \text{ avec } \lambda_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} g(t) dt.$$

Ainsi, $\Delta(p_k) \in \text{Vect}(p_k) \subset \mathcal{T}_n$, ce qui conclut : $\boxed{\Delta \text{ définit un endomorphisme de } \mathcal{T}_n}$.

Partie B -

I - La fonction J_n

Q6. Calcul classique :

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= e^{-int/2} \sum_{k=0}^n (e^{it})^k \\ &= e^{-int/2} \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} \\ &= e^{-int/2} \frac{e^{it} - 1}{e^{it/2} - e^{-it/2}} \frac{2i \sin((n+1)t/2)}{2i \sin(t/2)} \\ &= \frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}. \end{aligned}$$

$$\text{Et donc } f_n(t) = (\varphi_n(t))^4 = \left(\frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right)^4.$$

Q7. Erreur d'énoncé ici : $\boxed{\text{la fonction } \varphi_n \text{ n'appartient pas à } \mathcal{T}_n \text{ si } n \text{ est impair}}$ comme le montre l'exemple de la fonction $\varphi_1 : t \mapsto 2 \cos(t/2)$ qui n'est pas 2π -périodique.

On a

$$(\varphi_n(t))^2 = e^{-int} \sum_{k,l \in \llbracket 0, n \rrbracket} e^{i(k+l)t} = \sum_{k,l \in \llbracket 0, n \rrbracket} e^{i(k+l-n)t}.$$

Comme $k, l \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $k + l - n \in \llbracket -n, n \rrbracket$ et donc $\boxed{\varphi_n^2 \in \mathcal{T}_n}$.

De même,

$$f_n(t) = (\varphi_n(t))^4 = \sum_{k,l,k',l' \in \llbracket 0, n \rrbracket} e^{i(k+l+k'+l'-2n)t}$$

et comme $k + l + k' + l' - 2n \in \llbracket -2n, 2n \rrbracket$, $\boxed{f_n \in \mathcal{T}_{2n}}$.

Q8. La fonction f_n est continue à valeurs ≥ 0 , non identiquement nulle. On a donc $\int_{-\pi}^{\pi} f_n > 0$ et il suffit de poser

$$c_n = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f_n \right)^{-1} > 0.$$

II - Une majoration de $\int_{-\pi}^{\pi} |t|J_n(t) dt$

Q9. Les fonctions $t \mapsto |t|J_n(t)$ et f_n étant paires, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|J_n(t) dt = 2 \int_0^{\pi} |t|J_n(t) dt = 2c_n \int_0^{\pi} t f_n(t) dt$$

et

$$\frac{1}{c_n} = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt = 2 \int_0^{\pi} f_n(t) dt$$

donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|J_n(t) dt = \frac{\int_0^{\pi} t f_n(t) dt}{\int_0^{\pi} f_n(t) dt}.$$

Q10. La fonction sin est concave sur $[0, \pi/2]$ donc son graphe est situé au dessous de sa tangente en 0 et au dessus de sa corde passant par les points d'abscisse 0 et $\pi/2$.

Q11. A l'aide de **Q10**, on a

$$\forall t \in [0, \pi/2], 0 \leq f_n(t) \leq \left(\frac{\sin((n+1)t/2)}{t/\pi} \right)^4 = \pi^4 \frac{\sin^4((n+1)t/2)}{t^4}.$$

Par intégration des inégalités puis changement de variables

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^{\pi} t f_n(t) dt &\leq \pi^4 \int_0^{\pi} \frac{\sin^4((n+1)t/2)}{t^3} dt \\ &\stackrel{u=(n+1)t/2}{=} \pi^4 \int_0^{(n+1)\pi/2} \frac{\sin^4(u)}{(2u/(n+1))^3 (n+1)} du \\ &= \pi^4 \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \int_0^{(n+1)\pi/2} \frac{\sin^4(u)}{u^3} du. \end{aligned}$$

Q12. A l'aide de **Q10** à nouveau, on a

$$\forall t \in [0, \pi/2], f_n(t) \geq \left(\frac{\sin((n+1)t/2)}{t/2} \right)^4 = 2^4 \frac{\sin^4((n+1)t/2)}{t^4}.$$

Par intégration des inégalités puis changement de variables à nouveau

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f_n(t) dt &\geq 2^4 \int_0^{\pi} \frac{\sin^4((n+1)t/2)}{t^4} dt \\ &\stackrel{u=(n+1)t/2}{=} 2^4 \int_0^{(n+1)\pi/2} \frac{\sin^4(u)}{(2u/(n+1))^4 (n+1)} du \\ &= 2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\pi/2} \frac{\sin^4(u)}{u^4} du. \end{aligned}$$

Q13. Par quotient, on déduit de **Q11** et de **Q12** que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |t|J_n(t) dt \leq \frac{\pi^4}{2^3(n+1)} \frac{\int_0^{(n+1)\pi/2} \frac{\sin^4(u)}{u^3} du}{\int_0^{(n+1)\pi/2} \frac{\sin^4(u)}{u^4} du}.$$

Les fonctions $u \mapsto \frac{\sin^4(u)}{u^4}$ et $u \mapsto \frac{\sin^4(u)}{u^3}$ sont intégrales sur \mathbb{R}^+ (intégrales faussement impropres en 0 et $O(1/u^\alpha)$ avec $\alpha > 1$ en $+\infty$) donc la suite de terme général

$$u_n = \frac{\int_0^{(n+1)\pi/2} \frac{\sin^4(u)}{u^3} du}{\int_0^{(n+1)\pi/2} \frac{\sin^4(u)}{u^4} du}$$

est convergente donc bornée. Il existe donc un réel $M \geq 0$ tel que $0 \leq u_n \leq M$ pour tout n et on déduit finalement que

$$\forall n \geq 0, 0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt \leq \frac{a}{n+1} \text{ avec } a = \frac{M\pi^4}{2^3}.$$

III - Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Q14. Comme $\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) dt = 1$, l'identité

$$g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x) dt$$

est immédiate.

Puis,

$$\begin{aligned} T_n g(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} J_n(x-t) g(t) dt \\ &= \int_{u=x-t}^{\pi+x-\pi} J_n(u) g(x-u) (-du) \\ &= \int_{-\pi+x}^{\pi+x} J_n(u) g(x-u) du. \end{aligned}$$

Comme $u \mapsto J_n(u)g(x-u)$ est 2π -périodique comme produit de deux fonctions qui le sont, **Q4** permet d'affirmer que

$$T_n g(x) = \int_{-\pi+x}^{x+\pi} J_n(u) g(x-u) du = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(u) g(x-u) du.$$

On a alors

$$|T_n g(x) - g(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} J_n(u) (g(x-u) - g(x)) du \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(u) |g(x-u) - g(x)| du.$$

Q15. (a) D'après le théorème des accroissements finis à nouveau, on a

$$|T_n g(x) - g(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(u) |x-u-x| \|g'\|_{\infty} du = \|g'\|_{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} J_n(u) |u| du \stackrel{\mathbf{Q13}}{\leq} \|g'\|_{\infty} \frac{a}{n+1}.$$

Ceci étant vrai pour tout x , il vient

$$\|T_n g(x) - g(x)\|_{\infty} \leq \|g'\|_{\infty} \frac{a}{n+1}.$$

(b) D'après ce qui précède, la suite $(T_n g)$ converge uniformément vers g sur \mathbb{R} .

De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n \in \mathcal{T}_{2n} \text{ et } T_n g = \Delta(J_n) \in \mathcal{T}_{2n}$$

d'après **Q5** donc la suite $(T_n g)$ est bien une suite de polynômes trigonométriques.

Q16. (a) On a par définition de ω_g pour tous x et t ,

$$|g(x-t) - g(x)| \leq \omega_g(|t|) = \omega_g(|t|n \times (1/n)) \stackrel{\mathbf{Q3(c)}}{\leq} (1+n|t|)\omega_g(1/n).$$

(b) En utilisant **Q14**, il vient

$$\begin{aligned} \|T_n g - g\|_\infty &\leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(u)(1+n|u|)\omega_g(1/n) du \\ &= \omega_g(1/n) \left(1 + n \int_{-\pi}^{\pi} J_n(u)|u| du \right) \\ &\leq \omega_g(1/n) \left(1 + \frac{na}{n+1} \right) \\ &\leq \omega_g(1/n)(1+a). \end{aligned}$$

Et donc

$$\|T_n g - g\|_\infty \leq b \omega_g(1/n) \text{ avec } b = 1 + a.$$

(c) Comme on a admis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_g(1/n) = 0$, on en déduit de suite que la suite $(T_n g)$ converge uniformément vers g sur \mathbb{R} .

Partie C -

I -

Q17. Les racines de T sont les n nombres complexes distincts $e^{i\pi/n} e^{i2k\pi/n}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Q18. On a $T = \prod_{j=1}^n (X - z_j)$ et donc

$$T' = \sum_{l=1}^n \prod_{j \neq l} (X - z_j).$$

En évaluant en z_k , seul le terme $l = k$ de la somme a une contribution non nulle donc

$$T'(z_k) = \prod_{j \neq k} (z_k - z_j).$$

Q19. Comme aux Mines PC 2, avec la même fraction rationnelle (!!!), on est à l'extrême limite du programme officiel pour ne pas dire que l'on est clairement hors-programme !

On a

$$\mu_k = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) F(z) = \lim_{z \rightarrow z_k} \left((z - z_k) \frac{z^l}{T(z) - T(z_k)} \right) = \frac{z_k^l}{T'(z_k)} = \frac{z_k^l}{nz_k^{n-1}} = \frac{z_k^{l+1}}{nz_k^n} = -\frac{z_k^{l+1}}{n}.$$

$\boxed{\text{Si } l < n}$, on (?) sait que $E = 0$.

$\boxed{\text{Si } l = n}$, on (?) sait que E est constant et la valeur de cette constante est obtenue par exemple

en prenant $z = x \in \mathbb{R}$ et en faisant tendre x vers $+\infty$. On en déduit que $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{x^n + 1} = 1$.

Q20. On a alors d'une part, toujours dans le hors-programme...

$$F'(X) = - \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{(X - z_k)^2}$$

et donc

$$F'(1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k^{l+1}}{(z_k - 1)^2}.$$

D'autre part,

$$F'(X) = \frac{lX^{l-1}(X^n + 1) - nX^l X^{n-1}}{(X^n + 1)^2}$$

puis

$$F'(1) = \frac{2l - n}{4} = \frac{l}{2} - \frac{n}{4}.$$

En regroupant les deux identités, il vient

$$l = \frac{n}{2} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k^{l+1}}{(z_k - 1)^2}.$$

- Q21.** (a) La relation étant linéaire vis-à-vis de P , il suffit de la démontrer pour les monômes $P = X^l$. Il s'agit donc de vérifier que pour tout $l \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$lX^l = \frac{n}{2}X^l + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k z_k^l X^l}{(z_k - 1)^2},$$

relation qui découle de la relation obtenue en **Q20** multipliée par X^l .

- (b) Immédiat en appliquant **Q20** avec $l = 0$.

II -

- Q22.** Immédiat et laissé au lecteur : on se contente de rappeler ici qu'un polynôme possédant une infinité de racines est le polynôme nul.

- Q23.** Si z est de module 1, on peut écrire $z = e^{i\theta}$ et on a alors

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z-1)^2} &= \frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta} - 1)^2} \\ &= \frac{e^{i\theta}}{e^{2i\theta} - 2e^{i\theta} + 1} \\ &= \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}(2i \sin(\theta/2))^2} \\ &= \boxed{-\frac{1}{4 \sin^2(\theta/2)} \in \mathbb{R}^-}. \end{aligned}$$

- Q24.** A l'aide **Q21(a)**, on en déduit que pour $|z| = 1$ et $z \neq 1$,

$$zP'(z) = \frac{n}{2}P(z) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k P(z_k z)}{(z_k - 1)^2}.$$

Les z_k étant de module 1, les $z_k z$ sont aussi de module 1 et il vient

$$\begin{aligned} |P'(z)| &\leq \frac{n}{2} \|P\| + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} \right| \|P\| \\ &\stackrel{\text{Q23}}{=} \|P\| \left(\frac{n}{2} - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} \right) \\ &\stackrel{\text{Q21(b)}}{=} \|P\| \left(\frac{n}{2} + \frac{2}{n} \frac{n^2}{4} \right) \\ &= n \|P\|. \end{aligned}$$

Par continuité de P et passage à la limite quand z tend vers 1, l'inégalité précédente est encore vraie pour $z = 1$ et en passant à la borne supérieure sur tous les z de module 1, on en déduit que

$$\boxed{\|P'\| \leq n \|P\|}.$$

- Q25.** Soit $q \in \mathcal{T}_n$ que l'on écrit

$$x \mapsto q(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = e^{-inx} \sum_{k=-n}^n c_k e^{i(k+n)x} = e^{-inx} \sum_{j=0}^{2n} c_{j-n} e^{ijx} = e^{-inx} P(e^{ix})$$

avec $P = \sum_{j=0}^{2n} c_{j-n} X^j \in \mathbb{C}_{2n}[X]$.

On a d'une part : $\|q\|_\infty = \|P\|$. D'autre part,

$$q'(x) = -ine^{-inx} P(e^{ix}) + e^{-inx} i e^{ix} P'(e^{ix}),$$

donc

$$|q'(x)| \leq n|P(e^{ix})| + |P'(e^{ix})| \leq n\|P\| + \|P'\| \stackrel{\text{Q24}}{\leq} n\|P\| + 2n\|P\| = 3n\|P\| = 3n\|q\|_\infty.$$

En passant au sup en x , il vient

$$\boxed{\|q'\|_\infty \leq 3n\|q\|_\infty}.$$

Les inégalités démontrées en **Q24** et **Q25** sont connues sous le nom d'"inégalités de Bernstein".

Partie D - Fonctions höldériennes

I - Exemples

Q26. Si $y = 0$, il n'y a rien à dire. Si $y > 0$, la fonction $x \mapsto \varphi(x) = x^\alpha - (x - y)^\alpha$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]y, +\infty[$ et

$$\forall x \geq y, \varphi'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha(x - y)^{\alpha-1}.$$

Comme $x \geq x - y$ et $\alpha \in]0, 1[$, $\varphi'(x) \leq 0$. La fonction φ est décroissante donc

$$\forall x \geq y, \varphi(x) \leq \varphi(y) = y^\alpha,$$

ce qui fournit le résultat.

Q27. Quitte à échanger les rôles de x et y , **Q26** permet d'affirmer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, |x^\alpha - y^\alpha| \leq |x - y|^\alpha,$$

ce qui montre que $\boxed{h_\alpha \text{ est } \alpha\text{-höldérienne (avec } K = 1) \text{ sur } \mathbb{R}^+}$.

Q28. Supposons que h_α soit β -höldérienne sur \mathbb{R}^+ . Ceci implique qu'il existe $K \geq 0$ tel que

$$\forall x \geq 0, 0 \leq x^\alpha \leq Kx^\beta.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, ceci implique que $\alpha \leq \beta$. Puis, pour $x > 0$ il vient $1 \leq Kx^{\beta-\alpha}$ et en faisant tendre x vers 0, il vient $\beta \leq \alpha$. On en déduit que

$$\boxed{h_\alpha \text{ est } \beta\text{-höldérienne sur } \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \alpha = \beta}.$$

Q29. Pour $x \in [0, 1 - y]$, notons $\psi(x) = k(x + y) - k(x)$. La fonction ψ est continue sur $[0, 1 - y]$, dérivable sur $]0, 1 - y[$ et

$$\forall x \in]0, 1 - y[, \psi'(x) = \ln(x + y) - \ln(x) \geq 0.$$

La fonction ψ est donc croissante sur $[0, 1 - y]$ donc

$$\boxed{\forall x \in]0, 1 - y[, \psi(x) = (x + y) \ln(x + y) - x \ln(x) \leq \psi(1 - y) = (y - 1) \ln(1 - y)}.$$

Q30. Sauf erreur de ma part, il est nécessaire de compléter **Q29** par la double-inégalité, obtenue par même argument :

$$\forall x \in]0, 1 - y[, y \ln(y) \leq (x + y) \ln(x + y) - x \ln(x) \leq (y - 1) \ln(1 - y).$$

Soient alors $s, t \in [0, 1]$ tels que $s < t$. Posons $x = s$ et $y = t - s$. En appliquant la double-inégalité ci-dessus, il vient :

$$(t - s) \ln(t - s) \leq k(t) - k(s) \leq -(1 - (t - s)) \ln(1 - (t - s))$$

puis

$$(t - s)^{1-\alpha} \ln(t - s) \leq \frac{k(t) - k(s)}{(t - s)^\alpha} \leq -(1 - (t - s)) \frac{\ln(1 - (t - s))}{(t - s)^\alpha}.$$

Soient

$$u \mapsto s(u) = u^{1-\alpha} \ln(u) \text{ et } u \mapsto r(u) = -(1 - u) \frac{\ln(1 - u)}{u^\alpha}.$$

La fonction s est continue sur $]0, 1]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $s(0) = 0$. De même, la fonction r est continue sur $]0, 1[$ et se prolonge par continuité en 0 et en 1 en posant

$r(0) = r(1) = 0$. Ainsi, s et r sont continues sur le segment $[0, 1]$ et sont donc bornées par le théorème des bornes atteintes. On en déduit que

$$(t, s) \mapsto \frac{k(t) - k(s)}{(t - s)^\alpha}$$

est aussi bornée et donc que k est α -höldérienne.

II - Espace $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ et approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Q31. On commence par constater que toute fonction α -höldérienne est continue.

Puis on montre que $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ contient la fonction nulle et est stable par combinaisons linéaires (laissé au lecteur).

Q32. Soit K telle

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |g(x) - g(y)| \leq K|x - y|^\alpha.$$

En appliquant **Q16**, on a

$$\|T_n g - g\|_\infty \leq b \omega_g(1/n) \leq b \frac{K}{n^\alpha}$$

donc

$$0 \leq \delta_n(g) \leq \|T_n g - g\|_\infty \leq b \omega_g(1/n) \leq \frac{bK}{n^\alpha} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

III - Etude d'une réciproque

Q33. Soit

$$\mathcal{K} = \{p \in \mathcal{T}_n \mid \|p - f\|_\infty \leq \delta_n(f) + 1\}.$$

L'ensemble \mathcal{K} est une partie non vide, fermée et bornée de l'espace vectoriel normé de dimension finie $(\mathcal{T}_n, \|\cdot\|_\infty)$. La fonction $p \mapsto \|p - f\|_\infty$ est continue sur \mathcal{T}_n donc atteint sa borne inférieure en restriction à \mathcal{K} d'après le théorème des bornes atteintes. On en déduit qu'il existe $q_n \in \mathcal{K} \subset \mathcal{T}_n$ tel que

$$\|q_n - f\|_\infty = \inf_{p \in \mathcal{K}} \|p - f\|_\infty = \inf_{p \in \mathcal{T}_n} \|p - f\|_\infty = \delta_n(f).$$

Q34. On a à l'aide de **Q24**,

$$\begin{aligned} \|p'_{n+1} - p'_n\|_\infty &\leq 3 \times 2^{n+1} \|p_{n+1} - p_n\|_\infty \\ &\leq 3 \times 2^{n+1} (\|p_{n+1} - f\|_\infty + \|f - p_n\|_\infty) \\ &\leq 3 \times 2^{n+1} \times 2\delta_{2^n}(f) \\ &\leq 3 \times 2^{n+1} \times 2C 2^{-n\alpha} \\ &= 12C 2^{n(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Q35. On en déduit que

$$\begin{aligned} \|p'_n\|_\infty &= \left\| p'_0 + \sum_{k=0}^{n-1} p'_{k+1} - p'_k \right\|_\infty \\ &\leq \|p'_0\|_\infty + \sum_{k=0}^{n-1} \|p'_{k+1} - p'_k\|_\infty \\ &\leq \|p'_0\|_\infty + C' \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k(1-\alpha)} \\ &= \|p'_0\|_\infty + C' \frac{2^{n(1-\alpha)} - 1}{2^{1-\alpha} - 1} \\ &\leq \|p'_0\|_\infty + \frac{C'}{2^{1-\alpha} - 1} 2^{n(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Q36. D'après **Q35**,

$$\|p'_n\|_\infty \leq 2^{n(1-\alpha)} \left(\|p'_0\|_\infty 2^{-n(1-\alpha)} + \frac{C'}{2^{1-\alpha} - 1} \right).$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\|p'_0\|_\infty 2^{-n(1-\alpha)} + \frac{C'}{2^{1-\alpha} - 1} \right) = \frac{C'}{2^{1-\alpha} - 1},$$

la suite convergente $\left(\|p'_0\|_\infty 2^{-n(1-\alpha)} + \frac{C'}{2^{1-\alpha} - 1} \right)_{n \geq 0}$ est bornée. Il existe donc $A \geq 0$ tel que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \|p'_n\|_\infty \leq A 2^{n(1-\alpha)}}.$$

Q37. Par inégalité triangulaire et théorème des accroissements finis appliqué à p_n , on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - p_n(x) + p_n(x) - p_n(y) + p_n(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - p_n(x)| + |p_n(x) - p_n(y)| + |p_n(y) - f(y)| \\ &\leq C 2^{-n\alpha} + |x - y| \|p'_n\|_\infty + C 2^{-n\alpha} \\ &= C 2^{1-n\alpha} + |x - y| \|p'_n\|_\infty \\ &\leq \boxed{C 2^{1-n\alpha} + A 2^{n(1-\alpha)} |x - y|}. \end{aligned}$$

Q38. Suivons docilement l'indication : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq |x - y| \leq \frac{1}{2^n}.$$

On a alors d'une part

$$2^n \leq \frac{1}{|x - y|} \text{ puis } A 2^{n(1-\alpha)} |x - y| \leq A \frac{1}{|x - y|^{1-\alpha}} |x - y| = A |x - y|^\alpha.$$

Et d'autre part

$$\frac{1}{2^n} \leq 2|x - y| \text{ puis } C 2^{1-n\alpha} \leq 2C \times 2^\alpha |x - y|^\alpha.$$

On en déduit finalement que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq (A + C 2^{\alpha+1}) |x - y|^\alpha.$$

Pour $|x - y| \geq 1$, on écrit simplement

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty |x - y|^\alpha.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq \max(2\|f\|_\infty, A + C 2^{\alpha+1}) |x - y|^\alpha = K |x - y|^\alpha}.$$