

# ENS PC 2001

auteur: P.Châteaux

- Q1** 1. On réalise sur la matrice  $XI_{n+1} - N$  l'opération élémentaire  $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} + \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{X - d_j} C_j$ .

La matrice devient triangulaire et le calcul du déterminant donne  $P_N(X) = \left( X - a - \sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{X - d_j} \right) P_D(X)$ ,

avec  $P_D(X) = \prod_{k=1}^n (X - d_k)$ .

$P_N$  étant continue, on en déduit par passage à la limite que  $P_N(d_j) = -x_j^2 \prod_{k \neq j} (d_k - d_j)$ .

2. La fonction  $\varphi(t) = \frac{P_N(t)}{P_D(t)}$  est de classe  $C^1$  sur  $]-\infty, d_1[ \cup ]d_1, d_2[ \cup \dots \cup ]d_n, +\infty[$  et

$$\varphi'(t) = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{(t - d_j)^2} > 0. \text{ Comme } \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow d_j^+} \varphi(t) = -\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow d_{j+1}^-} \varphi(t) =$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$ , on en déduit que  $\forall j \in [1 \dots n-1], \exists! \mu_j \in ]d_j, d_{j+1}[$ ,  $\varphi(\mu_j) = 0$  et aux extrémités,  $\exists! \mu_0 \in ]-\infty, d_0[$ ,  $\varphi(\mu_0) = 0$  et  $\exists! \mu_n \in ]d_n, +\infty[$ ,  $\varphi(\mu_n) = 0$ .

$N$  étant de format  $n+1$ , les réels  $(\mu_j)_{0 \leq j \leq n}$  en constituent les  $n+1$  valeurs propres, qui sont séparées strictement par les coefficients diagonaux  $d_1, \dots, d_n$ .

- Q2** 1. On observe que si  $d_j = d_k$  avec  $j < k$  et  $d_{j-1} \neq d_j, d_{k+1} \neq d_j$ , alors  $\mu_i = d_j$  pour tout  $i \in [j \dots k-1]$ , donc  $d_j$  est racine d'ordre  $k-j+1$  du dénominateur et d'ordre  $k-j$  du numérateur, donc après simplification  $d_j$  est pôle simple de  $F$ .

On en déduit que les pôles de  $F$  sont simples et sont les réels  $d_j$  qui ne sont égaux à aucun réel  $\mu_l$ .

2. La fraction rationnelle  $F$  est de degré 1 (le quotient des termes dominants étant  $X$ ) et à pôles simples donc sa décomposition en éléments simples s'écrit  $X - a + \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{X - d_j}$  ( $c_j$  étant nul lorsque  $d_j$  n'est pas un pôle de  $F$ ).  $X - a$  est le quotient de la division euclidienne de  $\prod_{l=0}^n (X - \mu_l)$  par  $\prod_{j=1}^n (X - d_j)$ . En identifiant les termes de degré  $n-1$  dans la division, on

obtient  $-\sum_{l=0}^n \mu_l = -a - \sum_{j=1}^n d_j$ .

3.  $c_j = \frac{\prod_{l=0}^n (d_j - \mu_l)}{\prod_{k \neq j} (d_j - d_k)}$ . S'il existe un indice  $l$  tel que  $\mu_l = d_j$ ,  $c_j = 0$ .

Sinon,  $(d_j - \mu_l < 0 \iff l \geq j)$  et  $(d_j - d_k < 0 \iff k > j)$ , donc  $c_j$  est du signe de  $\frac{(-1)^{n-j+1}}{(-1)^{n-j}}$ , i.e négatif.

4. Dans le cas général, la somme comporte moins de termes et on peut se ramener au cas précédent avec une valeur de  $n$  inférieure. Les  $c_j$  obtenus sont négatifs ou nuls, et on peut les compléter par des 0.

5. On pose  $x = (\sqrt{-c_1}, \dots, \sqrt{-c_n})$  et  $N$  la matrice correspondante. Alors  $P_N(X) = F(X)P_D(X)$ , donc les valeurs propres de  $N$  sont  $\mu_0, \dots, \mu_n$ .

- Q3**  $M$  étant symétrique réelle, il existe  $P \in O(n)$  telle que  $P^{-1}MP = D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

1. On pose  $Q = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .  $Q \in O(n+1)$  et  $Q^{-1}NQ = \begin{bmatrix} D & P^{-1}X \\ {}^t(P^{-1}X) & a \end{bmatrix}$ . D'après Q1, les valeurs propres de  $Q^{-1}NQ$ , i.e celles de  $Q$ , vérifient  $\mu_0 \leq \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \mu_n$ .
2. D'après Q2, il existe  $y \in \mathbb{R}^n$  et  $a \in \mathbb{R}$  tels que  $\mu_0, \dots, \mu_n$  soient les valeurs propres de  $N' = \begin{bmatrix} D & Y \\ y & a \end{bmatrix}$ , où  $Y = {}^ty$ . On pose alors  $N = QN'Q^{-1} = \begin{bmatrix} M & PY \\ {}^t(PY) & a \end{bmatrix}$ . Le vecteur  $x$  représenté par le vecteur colonne  $PY$  convient.

**Q4** Réflexivité et transitivité sont évidentes. Si  $a \prec b$  et  $b \prec a$ , alors  $a_1 = b_1$  et pour  $k \geq 2$ ,  $a_k = s_k(a) - s_{k-1}(a) = s_k(b) - s_{k-1}(b) = b_k$ , donc  $a = b$ , d'où l'antisymétrie.

**Q5** La suite finie  $a_1, \dots, a_n$  est croissante, donc pour tout  $k \leq n$ , la moyenne arithmétique des  $k$  premiers termes est inférieure à celle des  $n$  termes, i.e  $s_k(a) \leq k\alpha$ , et  $s_n(a) = n\alpha$ , d'où  $a \prec b$ .

**Q6** Supposons le résultat, évident pour  $n = 1$ , vrai au rang  $n$ , et soit  $N \in S(n+1)$ ,  $\mu_0 \leq \dots \leq \mu_n$  ses valeurs propres. Quitte à remplacer  $N$  par  $P^{-1}NP$ , où  $P$  est une matrice de permutation, ce qui ne change pas le spectre, on peut supposer que le plus grand coefficient diagonal de  $N$  est le dernier, noté  $a$ . On écrit alors  $N = \begin{bmatrix} M & {}^tx \\ x & a \end{bmatrix}$ , où  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $M \in S(n)$ , de spectre  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ . On sait par hypothèse de récurrence que  $\text{spec}(M) \prec \text{diag}(M)$ , et par Q3,  $\mu_0 \leq \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \mu_n$ . On en déduit que pour tout  $k \leq n-1$ ,  $\mu_0 + \dots + \mu_k \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1} \leq d_1 + \dots + d_{k+1}$  et  $\sum_{i=0}^n \mu_i = \text{tr } N = \sum_{i=1}^{n+1} d_i$ , d'où  $\text{spec}(N) \prec \text{diag}(N)$ .

**Q7** 1. Le  $(n-1)$ -uplet  $(a_1, \dots, a_{n-1})$  appartient à  $\Delta$ . On voit que  $\Delta = \prod_{k=1}^{n-1} [a_k, a_{k+1}] \cap \left( \bigcap_{k=1}^{n-1} s_k^{-1}([-\infty, s_k(b)]) \right)$ .

$s_k$  étant continue,  $s_k^{-1}([-\infty, s_k(b)])$  est fermé, donc  $\Delta$  est fermé comme intersection de fermés, et borné, donc compact.

$s_{n-1}$  est continue sur le compact  $\Delta$ , donc y atteint son maximum en un élément  $d^*$ .

2. (a) Pour tout  $j \leq r$ ,  $s_j(d^*) = s_j(b)$ , donc par récurrence finie,  $d_j^* = b_j$ .

Par ailleurs,  $s_{r+1}(d^*) < s_{r+1}(b)$  donc  $d_{r+1}^* < b_{r+1}$ .

Supposons  $d_{r+1}^* < a_{r+2}$ . Alors  $\exists \varepsilon > 0$ ,  $d_{r+1}^* + \varepsilon < \min(a_{r+2}, b_{r+1})$ . On définit alors  $d \in C(n-1)$  par:  $\forall j \neq r$ ,  $d_j = d_j^*$  et  $d_{r+1} = d_{r+1}^* + \varepsilon$ . On vérifie que  $d \in \Delta$  car par choix de  $\varepsilon$ ,  $d_{r+1} \leq a_{r+2}$  et  $\forall k \geq r+1$ ,  $s_k(d) = s_k(d^*) + \varepsilon \leq s_k(b)$ . Enfin,  $s_{n-1}(d) = s_{n-1}(d^*) + \varepsilon$ , ce qui contredit la maximalité de  $s_{n-1}(d^*)$  sur  $\Delta$ . Par suite,  $d_{r+1}^* = a_{r+2}$  et en poursuivant par récurrence,  $d_j^* = a_{j+1}$  pour  $j > r+1$ .

(b) Si  $r = 0$ ,  $s_{n-1}(d^*) = a_2 + \dots + a_n = s_n(a) - a_1 = s_n(b) - a_1 = s_{n-1}(b) + b_n - a_1 \geq s_{n-1}(b) + b_1 - a_1 \geq s_{n-1}(b)$ .

Si  $r \geq 1$ ,  $s_{n-1}(d^*) = s_r(d^*) + a_{r+2} + \dots + a_n = s_r(b) + s_n(a) - s_{r+1}(a) \geq s_r(b) + s_n(b) - s_{r+1}(b) = s_n(b) - b_{r+1} \geq s_{n-1}(b) + b_n - b_{r+1} \geq s_{n-1}(b)$ .

(c)  $d^* \in \Delta$ , donc d'après b,  $s_{n-1}(d^*) = s_{n-1}(b)$ . Par ailleurs,  $\forall k \leq n-1$ ,  $s_k(d^*) \leq s_k(b)$ , donc  $d^* \prec \beta$ .

**Q8** Si  $n = 1$ ,  $\lambda_1 = \delta_1$ , la matrice  $(\lambda_1)$  convient.

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang  $n-1$ . Soient  $\delta, \lambda \in C(n)$  tels que  $\lambda \prec \delta$ . On pose  $\beta = (\delta_1, \dots, \delta_{n-1})$ . D'après Q7, il existe  $c \in C(n-1)$  telle que  $\lambda_1 \leq c_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq c_{n-1} \leq \lambda_n$  et  $c \prec \beta$ . Par hypothèse de récurrence, il existe  $M \in S(n-1)$  telle que  $c = \text{spec}(M)$  et  $\beta = \text{diag}(M)$ .

D'après Q3.2, il existe  $N = \begin{bmatrix} M & {}^tx \\ x & a \end{bmatrix}$  dont  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont les valeurs propres. Mais alors  $a = s_n(\text{diag}(N)) - s_{n-1}(\text{diag}(M)) = s_n(\lambda) - s_{n-1}(\beta) = s_n(\delta) - s_{n-1}(\beta) = \delta_n$ , d'où  $\lambda = \text{spec}(N)$  et  $\delta = \text{diag}(N)$ .

**Q9** 1.  $\forall i \in [1 \dots n]$ ,  $(Me)_i = \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$ , donc  $Me = e$ .

De même,  $\forall j \in [1 \dots n]$ ,  $({}^tMe)_j = \sum_{i=1}^n m_{i,j} = 1$ , donc  ${}^tMe = e$ .

2.  $P = P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ . On en déduit que  $PM = (m_{\sigma^{-1}(i),j})$ . Par suite,  $\forall i$ ,  $\sum_j m_{\sigma^{-1}(i),j} = 1$  et  $\forall j$ ,  $\sum_i m_{\sigma^{-1}(i),j} = \sum_k m_{k,j} = 1$  par chg d'indice  $k = \sigma^{-1}(i)$ , soit  $PM \in DS_n$ .

On démontre de même que  $MP = (m_{i,\sigma(j)}) \in DS_n$  (on peut aussi remarquer que  ${}^tM \in DS_n$ ,  ${}^tP = P_{\sigma^{-1}}$  et  $MP = {}^t(P{}^tM)$ ).

**Q10**  $\forall j, e_j \prec Me_j$ , donc  $(0, \dots, 0, 1) \prec (m_{1,j}, \dots, m_{n,j})$ . Ceci implique que  $\forall j, m_{i,j} \geq 0$ , et  $1 = \sum_{i=1}^n m_{i,j}$ .

On pose  $L_i = \sum_{k=1}^n m_{i,k}$  et  $L_{i_0} = \min_i L_i$ .  $e \prec Me$ , donc  $1 \leq L_{i_0}$  et par suite  $\forall i, 1 \leq L_i$ . Or  $\sum_{i=1}^n L_i = n$  (somme de tous les coefficients de la matrice calculée en sommant par colonne) ce qui impose que  $\forall i, L_i = 1$ . Par suite,  $M \in DS_n$ .

**Q11** 1.  $\forall t \geq \max(a_n, b_n)$ ,  $\sum_{j=1}^n (t - b_j) \leq \sum_{j=1}^n (t - a_j)$ , d'où  $\sum_{j=1}^n b_j \geq \sum_{j=1}^n a_j$ .  
 $\forall t \leq \min(a_1, b_1)$ ,  $\sum_{j=1}^n (b_j - t) \leq \sum_{j=1}^n (a_j - t)$ , d'où  $\sum_{j=1}^n b_j \leq \sum_{j=1}^n a_j$ . Par suite,  $s_n(a) = s_n(b)$ .

2.  $\forall t \in [a_k, a_{k+1}]$ , on a  $\sum_{j=1}^n |b_j - t| \leq \sum_{j=1}^k (t - a_j) + \sum_{j=k+1}^n (a_j - t)$ .

En écrivant que  $t - b_j \leq |b_j - t|$  pour  $j \leq k$  et que  $b_j - t \leq |b_j - t|$  pour  $j > k$ , il vient

$$\sum_{j=1}^k (t - b_j) + \sum_{j=k+1}^n (b_j - t) \leq \sum_{j=1}^k (t - a_j) + \sum_{j=k+1}^n (a_j - t), \text{ soit}$$

$$-s_k(b) + s_n(b) - s_k(b) \leq -s_k(a) + s_n(a) - s_k(a), \text{ or } s_n(a) = s_n(b), \text{ donc } s_k(a) \leq s_k(b).$$

3. On pose  $a = \hat{x}$  et  $b = \hat{y}$ . Les questions précédentes montrent que  $s_n(a) = s_n(b)$  et  $\forall k \leq n-1, s_k(a) \leq s_k(b)$ , d'où  $a \prec b$ , i.e  $x \prec y$ .

**Q12** 1.  $\|Mx\| = \sum_{i=1}^n |(Mx)_i| = \sum_{i=1}^n |\sum_{j=1}^n m_{i,j}x_j| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}|x_j| = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n m_{i,j})|x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| = \|x\|$ .

2. D'après 1,  $\forall t \in \mathbb{R}, \|M(x - te)\| \leq \|x - te\|$ , donc  $\sum_{j=1}^n |(Mx)_j - t| \leq \sum_{j=1}^n |x_j - t|$ . D'après Q11, on en déduit  $x \prec Mx$ .

**Q13** 1.  $\forall i, j, a_{i,j} \geq 0$  et  $\forall j, \sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n u_{i,j}^2 = 1$  (coef. d'indice  $j, j$  de  ${}^tPP$ ) et  $\forall i, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n u_{i,j}^2 = 1$  (coef. d'indice  $i, i$  de  $P{}^tP$ ). Par suite,  $A \in DS_n$ .

2. On pose  $\lambda = \hat{x}$  et  $\delta = \hat{y}$ . D'après Q8,  $\exists M \in S(n), \lambda = \text{spec}(M)$  et  $\delta = \text{diag}(M)$ . On diagonalise  $M$  dans le groupe orthogonal:  $\exists U \in O(n), U^{-1}MU = D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . On pose alors  $B = (u_{i,j}^2) \in DS_n$  d'après 1.  $M = UD{}^tU = (u_{i,j}\lambda_j)_{i,j}{}^tU$ . En comparant les termes diagonaux, il vient  $\forall i, \delta_i = \sum_{k=1}^n u_{i,k}^2 \lambda_k$ . Par suite,  $\delta = B\lambda$ . Il ne reste plus qu'à permuter l'ordre des lignes et des colonnes de  $B$  pour obtenir  $y = Ax$ , où  $A = PBQ$ ,  $P$  et  $Q$  étant des matrices de permutation. La matrice  $A$  ainsi obtenue appartient à  $DS_n$  en vertu de la question Q9.