SESSION DE 1991

concours interne de recrutement de professeurs certifiés et concours d'accès à l'échelle de rémunération

section : mathématiques

deuxième composition de mathématiques **Durée : 5 heures**

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Matériel à fournir : feuilles de papier quadrillé 5 × 5.

Dans un « essai sur les coniques », Blaise Pascal (1623-1662) énonce à l'âge de 17 ans le théorème de « l'hexagramme mystique » : si A, B, C, D, E, F sont six points d'une conique, les intersections des droites (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (AF) sont trois points alignés.

La deuxième partie du problème propose une démonstration de ce résultat dans le cas où la conique est une ellipse, résultat qu'on utilise afin de munir cette courbe d'une structure de groupe.

Dans la première partie, c'est sur une hyperbole qu'est définie une structure de groupe, exploitée pour la résolution en nombres entiers de l'équation de Pell-Fermat :

$$x^2 - 3y^2 = 1 .$$

Ces deux parties sont indépendantes.

Une troisième partie suggère une méthode permettant de munir une hyperbole d'une structure de groupe, à partir de la structure associée à un cercle introduite dans la deuxième partie.

Ce problème de géométrie plane réclame la mise en œuvre de différents outils : structures algébriques, nombres complexes, méthodes analytiques, éléments métriques, transformations...

Il est demandé de réaliser pour chaque séquence les figures appropriées.

La droite contenant deux points distincts M et N est notée (MN).

PREMIÈRE PARTIE

Résolution en nombres entiers de l'équation $x^2 - 3y^2 = 1$.

Le plan $\mathscr{P}$ étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'hyperbole H d'équation $x^2 - 3y^2 = 1$.

S désignant l'ensemble des points du plan dont les deux coordonnées sont des éléments de $\mathbb{Z}$, ensemble des entiers relatifs, on se propose d'étudier l'ensemble $H \cap S$ des points communs à H et S.

Tracé de H.

Déterminer les asymptotes de H puis représenter H dans le plan $\mathscr{P}$.

A SUIVRE

A

Étude d'une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$.

À tout point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on associe son affixe qui est le nombre complexe $z = x + iy$.

On définit une application f de $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, dans $\mathbb{C}$ par :

$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = (2 - i)z + 2i\bar{z}$ ($\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z).

À f on associe l'application F de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, au point M d'affixe z, associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = f(z)$.

1. Calculer les coordonnées x' et y' de $M' = F(M)$ en fonction des coordonnées x et y de M. En déduire que l'application F est affine et bijective. Est-ce une isométrie ?

2. Soient A et B deux points du plan $\mathscr{P}$, A′ et B′ leurs images respectives par F. Montrer que les triangles OAB et OA′B′ ont même aire.

   Plus généralement, montrer que F conserve l'aire de tout triangle, c'est-à-dire que si C est un point du plan et C′ son image par F, les triangles ABC et A′B′C′ ont même aire.

3. *a.* Montrer que le point M appartient à S si et seulement si le point $M' = F(M)$ appartient à S.

   b. Montrer que le point M appartient à H si et seulement si le point $M' = F(M)$ appartient à H.

4. On construit par récurrence une suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout entier n, $A_{n+1} = F(A_n)$, A_0 étant le point de coordonnées $(1, 0)$.

   a. Calculer les coordonnées de A_1 et A_2 et faire figurer ces points sur H.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, A_n appartient à $H \cap S$.

   c. Quels sont les points de S situés sur l'arc $[A_0, A_1]$ de H ?

B

Structure de groupe sur H.

On définit dans H une opération $*$ ainsi :

M et N étant deux points de H, on leur associe la droite, notée $\Delta_{M,N}$, issue de A_0 et parallèle à la droite (MN) (ou à la tangente en M à H si M = N).

Dans le cas où $\Delta_{M,N}$ est tangente à H en A_0, $M * N = A_0$.

Sinon $M * N$ est le second point de rencontre avec H de $\Delta_{M,N}$.

1. On note $\mathscr{R}$ le repère affine dont les axes sont portés par les asymptotes de H, dans lequel les coordonnées de A_0 sont $(1, 1)$ et tel que l'abscisse de A_1 soit un nombre strictement inférieur à 1.

   Montrer que, dans ce repère, H a pour équation $XY = 1$.

2. Pour deux points M et N de H, calculer, dans le repère $\mathscr{R}$, l'abscisse de $M * N$ en fonction des abscisses de M et N. En déduire que $(H, *)$ est un groupe isomorphe au groupe multiplicatif des réels non nuls.

   En s'appuyant sur ce qui précède, montrer que toute hyperbole peut être munie d'une structure de groupe isomorphe au groupe multiplicatif des réels non nuls.

C

Application à la résolution de l'équation de Pell-Fermat.

1. Prouver que $\forall M \in H, F(M) = A_1 * M$.

2. Pour tout entier naturel n, on désigne par X_n et Y_n les coordonnées de A_n dans le repère $\mathscr{R}$. Calculer X_n en fonction de X_1.

Tournez la page S.V.P.

3. Soit n un entier strictement positif.

   a. Montrer que la tangente en A_n à H est parallèle à la droite $(A_{n-1}\ A_{n+1})$.

   b. Calculer l'aire du triangle $A_{n-1}\ A_n\ A_{n+1}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que M est un point de l'arc $[A_n, A_{n+1}]$ de H si et seulement si le point $M' = A_1 * M$ appartient à l'arc $[A_{n+1}, A_{n+2}]$ de H.

5. À partir de la suite des points $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, décrire l'ensemble $H \cap S$.

6. Prouver que $(H \cap S, *)$ est un sous-groupe de $(H, *)$.

7. *a.* Calculer X_1.

   b. Pour tout entier naturel n, calculer X_n et Y_n en fonction de n.

8. Donner tous les couples (x, y) de nombres entiers naturels solutions de l'équation de Pell-Fermat :

$$x^2 - 3y^2 = 1.$$

DEUXIÈME PARTIE

A

Cette séquence met en place des résultats qui peuvent être utilisés pour établir le théorème de Pascal dans le cas où la conique est un cercle.

Les données sont :

- deux droites Δ_1 et Δ_2 sécantes en α ;
- un point I sur Δ_1, un point J sur Δ_2, ces deux points étant distincts de α.

1. Points alignés.

   Soit K un point n'appartenant à aucune des trois droites Δ_1, Δ_2, (IJ).

   On introduit un triangle variable LMN dont les sommets L et M appartiennent respectivement aux droites Δ_1 et Δ_2, les droites (LM), (MN), (NL) étant respectivement parallèles aux droites (IJ), (JK), (KI).

   Montrer que le point N se déplace sur la droite (αK).

2. Droites parallèles.

   On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle α IJ.

   Un cercle variable Γ, distinct de $\mathscr{C}$, passe par les points I et J et recoupe les droites Δ_1 et Δ_2, respectivement en I' et J'. Les points I, J, I', J' sont supposés distincts.

   Démontrer que la droite (I'J') est parallèle à la tangente en α au cercle $\mathscr{C}$.

B

Le théorème de Pascal dans le cas du cercle.

On donne un quadrilatère ADPQ (trois quelconques de ces quatre points ne sont pas alignés) et on suppose que les droites (AQ) et (DP) se coupent en ω, les droites (AP) et (DQ) en ω'.

Un cercle variable Γ passe par les points A et D et recoupe les droites (AP), (AQ), (DP), (DQ) respectivement en B, F, E, C. Les points A, B, C, D, E, F sont supposés distincts.

1. Démontrer que chacune des droites (BC), (EF), (BE), (CF) garde une direction fixe.

2. Démontrer que, si le quadrilatère ADPQ est inscriptible, les droites (PQ), (BC) et (EF) sont parallèles.

A SUIVRE

3. On suppose que ADPQ n'est pas inscriptible. Montrez que les droites (BC) et (EF) sont concourantes en un point R appartenant à la droite (PQ). (On pourra montrer que, lorsque Γ varie, R se déplace sur une droite passant par P et sur une droite passant par Q).

4. *Application :* établir le théorème de Pascal (cf. introduction) dans le cas où l'hexagone ABCDEF est inscrit dans un cercle. On supposera que la configuration ne contient pas deux droites parallèles afin que toutes les intersections nécessaires existent.

5. Dans cette question, on suppose le quadrilatère $AD\omega\omega'$ inscriptible et on désigne par Γ_1 son cercle circonscrit. On suppose que les tangentes à Γ_1 en ω et ω' se coupent en R_1. Montrer que les points P, Q, R_1 sont alignés.

C

L'ellipse.

1. Le théorème de Pascal.

   Montrer qu'un élève de terminale C peut déduire du résultat obtenu à la question B.4., dans le cas où la conique est un cercle, le théorème de Pascal dans le cas où la conique est une ellipse (en supposant toujours que toutes les intersections nécessaires existent).

2. Structure de groupe.

   Les données sont :
   - une ellipse $\mathscr{E}$;
   - E un de ses points ;
   - Δ une droite qui n'est pas parallèle à la tangente en E à l'ellipse $\mathscr{E}$ et qui ne rencontre pas $\mathscr{E}$.

   On définit dans $\mathscr{E}$ une opération $*$ de la manière suivante :

   M et N étant deux points de $\mathscr{E}$, la droite (MN) (ou la tangente en M à $\mathscr{E}$ lorsque M = N) coupe Δ en L ou lui est parallèle.

   Dans ce dernier cas, $M * N$ est le point où la parallèle à Δ passant par E recoupe $\mathscr{E}$.

   Sinon $M * N$ est le second point d'intersection de la droite (LE) avec $\mathscr{E}$ ou le point E si (LE) est tangente en E à $\mathscr{E}$.

   a. Montrer que $\mathscr{E}$ muni de l'opération $*$ est un groupe commutatif.

   On se contentera de faire les vérifications utiles dans le cas où la configuration qui entre en jeu est la plus générale.

   b. Résoudre dans le groupe $(\mathscr{E}, *)$ l'équation $M * M = E$ où le point M est l'inconnue.

   Remarque : *une étude analogue peut être faite lorsque Δ est strictement parallèle à la tangente en E à $\mathscr{E}$ ou lorsque Δ coupe $\mathscr{E}$ en deux points U et V distincts de E. Dans ce dernier cas, c'est sur $\mathscr{E} \setminus \{U, V\}$ qu'est définie une structure de groupe.*
   Cette étude n'est pas demandée dans le problème mais on pourra en admettre le résultat.

Tournez la page S.V.P.

TROISIÈME PARTIE

A

Étude d'une configuration.

Les données sont :

— deux points distincts A et D ;

— le cercle Γ de diamètre [AD] ;

— deux points m et m' de Γ, distincts de A et D, symétriques par rapport à la droite (AD) et non situés sur la médiatrice du segment [AD].

Les droites (Dm) et (Am') se coupent en M, les droites (Dm') et (Am) en M$'$, les tangentes à Γ en m et m' se coupent au point T.

Démontrer que :

1. Les points T, M, M$'$ sont alignés ;
2. $TM = Tm$;
3. $TM^2 = \overline{TA} \cdot \overline{TD}$.

B

Hyperbole associée à (Γ).

On suppose dans la suite que AD = 2.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, O étant le milieu du segment [AD] et $\vec{i}$ le vecteur $\overrightarrow{OA}$.

Γ coupe l'axe $(O, \vec{j})$ aux points U (0, 1) et V (0, − 1).

On note $\overline{\Gamma} = \Gamma \setminus \{U, V\}$.

À tout point m de $\overline{\Gamma}$, on associe le point M du plan $\mathscr{P}$ ainsi défini :

— si m est en A ou D, M = m ;

— sinon M est le point d'intersection des droites (Dm) et (Am'), m' étant le symétrique de m par rapport à la droite (AD).

On désigne par h l'application de $\overline{\Gamma}$ dans $\mathscr{P}$ ainsi définie.

Démontrer que le point M appartient à l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

C

Soient m et n deux points distincts de $\overline{\Gamma}$, M = $h(m)$, N = $h(n)$. On suppose que la droite (mn) coupe la droite (UV) en l et on désigne par l' le symétrique de l par rapport à la droite (AD).

1. Calculer, en fonction des coordonnées (x, y) de m, les coordonnées (X, Y) de M.

2. Montrer que les droites $(A\,l')$ et (MN) sont parallèles.

3. Indiquer brièvement comment on peut munir $\overline{\Gamma}$ et $\mathscr{H}$ de structures de groupes (opérations respectivement notées $*$ et $\circledast$) telles que pour tous points m et n de $\overline{\Gamma}$, $M \circledast N = h(m * n)$, M et N étant les images respectives de m et n par h. (On pourra se reporter aux paragraphes C.2. de la deuxième partie et B de la première partie).

FIN