Corrigé de la première épreuve de mathématique
CCP 2021

1 Exercice 1

Q1

Pour $k \geq 1$ la fonction $t \longmapsto t^{2k}\ln(t)$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 et sa limite est 0 , donc la fonction est intégrable sur $[0,1]$.
Pour $k=0$ la fonction $t \longmapsto \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$ et au voisinage de 0 on a

$$\ln(t) = o(\frac{1}{\sqrt{t}})$$

.La comparaison avec les intégrales de Riemann nous donne l'intégrabilité .

Q2

On sait d'après les développements en séries entières usuels que :

$$\frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} \qquad t \in]-1,1[$$

On peut donc écrire :

$$f(t) = -\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(t)t^{2k} \qquad t \in]0,1[$$

On pose $f_k(t) = -\ln(t)t^{2k}$ $t \in]0,1[$.
a) f_k est intégrable sur $]0,1[$ pour tout entier k.
b) la série $\sum_{k\geq 0} f_k$ converge simplement et sa somme est f
c) $\int_0^1 |f_k(t)|dt = -\int_0^1 \ln(t)t^{2k}dt = \frac{1}{(2k+1)^2}$ (on fait une intégration par parties)
on met en évidence l'hypothèse $\sum_{k\geq 0}\int_0^1 |f_k(t)|dt$ est convergente .
On peut donc intervertir et on trouve :

$$\int_0^1 f(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 f_k(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$$

2 Exercice 2

Q3

On pose : $h(t) = \ln(t)$ $t \in]0,+\infty[$.
La fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant : $h'(t) = \frac{1}{t}$ $h''(t) = -\frac{1}{t^2}$

La dérivé seconde est négative , donc la fonction est concave.

$$\ln(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c) \geq \frac{1}{3}\ln(a)+\frac{1}{3}\ln(b)+\frac{1}{3}\ln(c)=\frac{1}{3}\ln(abc)=\ln((abc)^{\frac{1}{3}})$$

Puis on compose par l'exponentielle qui est une fonction croissante

Q4

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=1-\dfrac{1}{yx^2} \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=1-\dfrac{1}{xy^2}$

Pour déterminer les points critiques on doit résoudre : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$

On trouve alors : $xy^2=1 \quad yx^2=1$, le rapport des deux égalités nous donne $x=y$, et on réinjecte on trouve $x=y=1$.

Il y a donc un seul point critique $(1,1)$.

La fonction f n'est pas majorée (quand on s'approche de $(0,0)$ ou quand l'une des deux variables tend vers l'infini)

$f(1,1)=3$, en utilisant la question Q2 avec $a=xb=y=c=\dfrac{1}{xy}$ on trouve

$$f(x,y)\geq 3;\ \ \forall (x,y)\in]0,\infty[^2$$

La fonction f réalise un minimum globale au point $(1,1)$ et ce minimum est 3.

3 PROBLÈME

Un peu d'arithmétique avec la fonction zêta de Riemann

<u>Partie 1</u>

```python
def factorielle(n):
    f=1
    for i in range(1,n+1):
        f*=i
    return f

def binom(n,p):
    if not (0<=p<=n):
        return 0
    return factorielle(n)//(factorielle(n-p)*factorielle(p))
```

"""Le nombre de multiplications réalisées dans l'appel $binom(30,10)=30+20+10+1=61$

où 30 dans factorielle(30), 20 dans factorielle(20), 10 dans factorielle(10) et 1 dans $factorielle(20)*factorielle(10)$""" """On peut réduire ce nombre à 20, en réduisant l'expression de $binom(n,p)=(n.(n-1)...(n-p+1))/(p!)$. De cette manière on aura que 2p=20 multiplications à faire"""

"""si on change // par / le résultat sera de type réel (float)"""

```
def binom_rec(n,p):
    if n==0 or p==0:
        return 1
    return binom_rec(n-1,p-1)*n//p
def bernoulli(n):
    b=[1]
    for i in range(1,n+1):
        s=0
        for k in range(i):
          s+=b[k]*binom(i+1,k)
        s*=(-1)/(i+1)
        b+=[s]
    return b[-1]
```

Partie 2

Q9

$\dfrac{\ln(n)}{n^a} = \dfrac{\ln(n)}{n^\beta}\dfrac{1}{n^\alpha}$ $\quad \beta = \dfrac{a-1}{2} \quad \alpha = \dfrac{a+1}{2} > 1$

Comme $\dfrac{\ln(n)}{n^\beta} \longmapsto 0$ on peut donc écrire $\dfrac{\ln(n)}{n^a} = o(\dfrac{1}{n^\alpha})$, d'après les relations de comparaisons des séries à termes positifs la série $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^a}$ est convergente.

Q10

On va utiliser le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions.

On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

a) Pour tout entier n non nul f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et sa dérivé est $f_n'(x) = -\dfrac{\ln(x)}{n^x}$

b) $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ (série de Riemann avec $x > 1$)

c) Pour tout $x \in [a, b] \subset]1, +\infty[$ on a :

$$|f_n'(x)| \leq \frac{\ln(n)}{n^a} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

La convergence de la série $\sum_{n \geq 1} f_n'$ est normale , donc uniforme sur tout $[a, b] \subset]1, +\infty[$.

La dérivation sous le signe somme est donc justifiée et on a :

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x} \leq 0$$

On conclut que ζ est décroissante.

Q11

La convergence n'est pas uniforme sur $]1, +\infty[$.

$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f_n(x) = \dfrac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que la série converge uniformément sur $]1,+\infty[$, on peut d'après le théorème d'interversion de limite conclure que $\sum \frac{1}{n}$ converge et on peut intervertir limite et somme , ce qui est absurde.

Q12

On a la convergence normale ,donc uniforme de $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $[2,+\infty[$,on peut donc utiliser le théorème d'interversion de limite en plus l'infini et on trouve :

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$$

(attention au premier terme de la somme)

Q13

Pour $x > 1$ la fonction : $t \longmapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$, d'après la relation de comparaison entre séries et intégrales on a :

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{t^x}dt \leq \frac{1}{n^x} \qquad \forall n\geq 1$$

$$\frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n}\frac{1}{t^x}dt \qquad \forall n\geq 2$$

En faisant la somme , on trouve le résultat.

Un calcul simple nous donne $I(x) = \frac{1}{x-1}$, on peut donc écrire :

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1} \quad\Longrightarrow\quad 1 \leq (x-1)\zeta(x) \leq x$$

On conclut que :

$$\zeta(x) \simeq_1 \frac{1}{x-1}$$

Q14

On pose $u_{a,b} = \frac{1}{(ab)^x}$ $(a,b)\in A = \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$

C'est une famille de termes positifs .

On fixe $a\in\mathbb{N}^*$, la série $\sum_{b\geq 1} u_{a,b}$ est convergente (absolument) et sa somme est $S_a = \frac{\zeta(x)}{a^x}$

La série $\sum_{a\geq 1} S_a$ est convergente .

La famille donc est sommable et sa somme est

$$\sum_{a=1}^{+\infty}\sum_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{a^x}\frac{1}{b^x} = (\sum_{a=1}^{+\infty}\frac{1}{a^x})(\sum_{a=1}^{+\infty}\frac{1}{b^x}) = \zeta^2(x)$$

On va maintenant considérer une autre partition de A , on doit trouver la même somme .

$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(a,b)\in A_n} u_{a,b}$$

$A_n = \{(a, \frac{n}{a}) \quad , \quad a \mid n\}$, le cardinal de A_n est d_n et pour chaque couple $(a, b) \in A_n$ le produit est toujours n , on trouve donc :

$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}$$

<u>Partie 3</u>

Q15

$\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}(\cup_{k\in\mathbb{N}^*}(X = ak)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = ak) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)a^s k^s} = \frac{1}{\zeta(s)a^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{a^s}$

On a pu passer de la probabilité de la réunion à la somme des probabilités car les événements sont disjoints.

Q16

C'est le théorème de Gauss pour le sens directe . Le sens inverse est évident.

Contre exemple : $2 \mid 4 \qquad 4 \mid 4 \qquad 1 \mid 4$, les trois nombres sont premiers entre eux dans leur ensembles mais le produit qui est 8 ne divise pas 4.

Q17

On pose E_i l'événement $(X \in a_i\mathbb{N}^*)$ pour $1 \leq i \leq n$.

$E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n$ signifie que X est divisible par a_i pour $1 \leq i \leq n$, ce qui est équivalent à X est divisible par le produit .

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} E_i) = \mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*)$$

avec $a = \prod_{i=1}^{n} a_i$

$$\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^s} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^s} = \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{P}(E_i)$$

On peut refaire ça pour toute sous famille $\{E_i \quad , \quad i \in J \subset \{1, 2, \ldots, n\}\}$ et on conclut que les événements sont mutuellement indépendants.

Q18

La probabilité que X soit divisible par p_k est $\frac{1}{p_k^s}$, donc la probabilité de l'événement contraire est $1 - \frac{1}{p_k^s}$ et ceci pour $1 \leq k \leq n$.

Les événements contraires sont aussi mutuellement indépendants on trouve donc le résultat.

Q19

1 est le seul entier à n'admettre aucun diviseur premier $\quad X(\omega) = 1$.

$(\cap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$ car les événements sont décroissants au sens de l'inclusion.

On trouve finalement :

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{1}{p_k^s})$$

Et on passe à l'inverse.

Q20

$\ln(u_n) = -\sum_{k=1}^{n} \ln(1 - \frac{1}{p_k})$

Comme la suite $(\frac{1}{p_k})_k$ converge vers 0, on a alors l'équivalence :

$$\ln(1 - \frac{1}{p_k})) \simeq \frac{1}{p_k} \geq 0$$

$\ln(u_n)$ est la somme partielle d'une série convergente (sous l'hypothèse qu'on a faite), elle est donc convergente et on compose par l'exponentielle, il existe alors $l > 0$ tel que $u_n \longrightarrow l$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_{n+1}}} \geq 1$ on en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante , on a donc :

$$u_n \leq l \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}^*$$

Pour $s > 1$ on a $\frac{1}{p_k^s} \leq \frac{1}{p_k}$, on conclut alors que :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(1 - \frac{1}{p_k^s})} \leq \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(1 - \frac{1}{p_k})} = u_n \leq l \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall s \in]1, +\infty[$$

On fait tendre n vers l'infini et on trouve :

$$\zeta(s) \leq l \qquad \forall s \in]1, +\infty[$$

La fonction ζ est donc majorée , mais d'après la question Q13 on a $\zeta(s) \simeq_{1^+} \frac{1}{s-1}$

On trouve la contradiction en passant à la limite au point 1.