M 58

CONCOURS COMMUN MINES.PONTS 1978

OPTION M - 2EME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, spécifique aux candidats de l'option M, comporte 4 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

Dans tout le problème on note :

- I un intervalle donné du corps des réels $\mathbb{R}$, non réduit à un point.
- $\mathcal{F}(I)$ l'algèbre des fonctions réelles définies sur I.
- $u.v$, u^p, $u+v$, $|u|$, les fonctions qui, pour $u,v \in \mathcal{F}(I)$ associent respectivement à tout x de I, les réels $u(x)v(x)$, $(u(x))^p$, $u(x)+v(x)$, $|u(x)|$.
- $u \geqslant o$ pour tout $u \in \mathcal{F}(I)$ si et seulement si $u(x) \geqslant o$ pour tout $x \in I$.
- $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k, \dots$, les éléments de $\mathcal{F}(I)$, définis, pour tout $x \in I$, par : $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = x$, ..., $\phi_k(x) = x^k$, ...
- $\mathcal{C}_B(I)$ la sous-algèbre de $\mathcal{F}(I)$ constituée des fonctions continues et bornées sur I.
- χ_A la fonction caractéristique d'une partie quelconque A de $\mathbb{R}$ $[\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, $\chi_A(x) = o$ si $x \notin A]$.
- δ_x application de $\mathcal{F}(I)$ dans $\mathbb{R}$ défini pour tout $x \in I$ par : $\delta_x(u) = u(x)$ quel que soit $u \in \mathcal{F}(I)$.
- $\mathcal{M}$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathcal{F}(I)$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{M}^+$ l'ensemble des $M \in \mathcal{M}$ tels que $M(u) \geqslant o$ pour tout $u \geqslant o$.
- S l'espace vectoriel des suites réelles.
- $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{N}^*$) l'ensemble des entiers positifs (resp. strictement positifs).
- $[y]$, la partie entière de tout nombre réel y.

PARTIE I

I - 1. Soit $M \in \mathcal{M}^+$.

a) Exprimer, pour tout réel θ, en fonction de $M(\phi_0)$, $M(\phi_1)$, et $M(\phi_2)$ la valeur du réel $M\left((\phi_1 - \theta\phi_0)^2\right)$.
En déduire une expression simple de $M\left((\phi_1 - M(\phi_1)\phi_0)^2\right)$ en fonction de $M(\phi_0)$, $M(\phi_1)$, $M(\phi_2)$.

b) Montrer que l'application de $\mathcal{F}(I)$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$u \longmapsto M(u^2)$ est une forme quadratique positive ; en déduire que :
$(M(u.v))^2 \leqslant M(u^2).M(v^2)$ pour tout couple (u,v) d'éléments de $\mathcal{F}(I)$
et que : $\left(M(|\phi_1|)\right)^2 \leqslant M(\phi_0).M(\phi_2)$.

.../...

c) On note θ_M et σ_M les réels définis par :

$$\theta_M = M(\phi_1) \quad ; \quad \sigma_M = \sqrt{M((\phi_1 - \theta_M\phi_0)^2)} .$$

Montrer que :

$$(\forall \delta > 0) \left(M(\chi_{A_\delta}) \leqslant \sigma_M^2/\delta^2 \right) \quad \text{où } A_\delta = \{x \in I : |x - \theta_M| \geqslant \delta\}$$

I - 2. a) Démontrer que :

$$\left[(\forall u \in \mathscr{C}_B(I)) \ (\exists C > 0) \ (\forall \theta \in I) \ (\forall \varepsilon > 0) \ (\exists \delta > 0) \ (\forall x \in I) \left(|u(x) - u(\theta)| \leqslant \varepsilon\chi_{A'_\delta}(x) + C\chi_{A_\delta}(x) \right) \right]$$

où $A_\delta = \{ x \in I : |x - \theta| \geqslant \delta \}$, $A'_\delta = \{ x \in I : |x - \theta| < \delta \}$.

b) Soit $(\theta, D) \in I \times]0,+\infty[$ et $\mathfrak{M}^+_{\theta,D} = \{ M \in \mathfrak{M}^+ : \theta_M = \theta , \ 0 \leqslant M(\phi_0) \leqslant D \}$.

Montrer que :

$$(\forall u \in \mathscr{C}_B(I)) \ (\forall \varepsilon > 0) \ (\exists \eta > 0) \ (\forall M \in \mathfrak{M}^+_{\theta,D} : \sigma_M \leqslant \eta) \ (|M(u) - u(\theta)\, M(\phi_0)| \leqslant \varepsilon) .$$

c) Soit $\theta, D, \sigma \in I \times ( ]0,+\infty[ )^2$ et :

$$\mathfrak{M}^+_{\theta,D,\sigma} = \{ M \in \mathfrak{M}^+ : \theta_M = \theta , \ 0 \leqslant M(\phi_0) \leqslant D ; \ \sigma_M = \sigma \} .$$

Montrer que : $\displaystyle\lim_{\sigma \to 0} \left[\sup_{M \in \mathfrak{M}^+_{\theta,D,\sigma}} \left(|M(u) - u(\theta)\, M(\phi_0)| \right) \right] = 0$ pour tout élément $u \in \mathscr{C}_B(I)$.

PARTIE II

Etude de deux exemples

II - 1. On suppose dans cette question seulement que I est l'intervalle fermé $[0,1]$; si $n \in \mathbb{N}^*$, et p est un réel, $p \in [0,1]$, on désigne par $B_{n,p}$ l'élément de $\mathfrak{M}$ défini par :

$$B_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k} \, \delta_{k/n} .$$

a) Soit $H(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}$. Sommer $H(x)$ et en déduire la valeur de $H(1)$.

b) Ecrire deux expressions possibles pour les fonctions dérivées première et seconde de H, H' et H".

c) En déduire que $\theta_{B_{n,p}} = p$; $(\sigma_{B_{n,p}})^2 = \dfrac{p(1-p)}{n}$; $B_{n,p}(\phi_0) = 1$.

II - 2. On suppose dans cette question seulement que I est l'ensemble des réels positifs ou nuls. Soit $(c,n) \in]0,+\infty[\times \mathbb{N}^*$. On note $E_{n,c}$ l'application définie sur $\mathscr{C}_B(I)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, par :

$$E_{n,c}(u) = e^{-nc} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nc)^k}{k!} \, u\left(\frac{k}{n}\right) \text{ pour tout } u \in \mathscr{C}_B(I) .$$

.../...

a) Montrer que $E_{n,c}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_B(I)$ qui peut se prolonger naturellement sur le sous-espace vectoriel $G(I)$ des fonctions de $\mathcal{F}(I)$ vérifiant :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall c > 0)\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nc)^k}{k!} \left|u\left(\frac{k}{n}\right)\right| < +\infty\right).$$

Montrer, en particulier, que $G(I)$ contient toutes les fonctions ϕ_p, $p \geq 0$.
[Le prolongement de $E_{n,c}$ à $G(I)$ sera encore noté $E_{n,c}$] .

b) Montrer que :

$$E_{n,c}(\phi_1) = c \quad ; \quad E_{n,c}\left((\phi_1 - c\phi_0)^2\right) = \frac{c}{n} \quad ; \quad E_{n,c}(\phi_0) = 1 .$$

PARTIE III

On suppose, dans toute cette partie, que I est l'intervalle $[0,1]$.
Pour $u \in \mathcal{F}(I)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_{n,u}$ la fonction polynôme définie pour tout $y \in \mathbb{R}$, par :

$$P_{n,u}(y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, y^k (1-y)^{n-k}\, u\left(\frac{k}{n}\right).$$

III - 1. Montrer que, pour toute fonction u, $u \in \mathcal{C}_B(I)$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\sup_{y \in [0,1]} \left(|u(y) - P_{n,u}(y)| \right)\right] = 0$$

III - 2. a) Soit f une fonction définie sur $[0,1]$, positive, et Riemann-intégrable sur $[0,1]$. Justifier l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de l'intégrale $\int_0^1 t^n f(t)\,dt$.

b) Si on convient de représenter par χ_x la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,x]$, montrer :

$$(\forall x \in [0,1])\ \left(\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 P_{n,\chi_x}(t)\, f(t)\,dt\right).$$

c) En déduire que, pour toute fonction réelle g définie sur $[0,1]$ et intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$:

$$\left(\forall x \in [0,1]\right)\ \left(\int_0^x g(t)\,dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 P_{n,\chi_x}(t)\, g(t)\,dt\right).$$

III - 3. On désigne par Δ l'endomorphisme de S qui à toute suite $c = (c_n)_{n\geq 0}$ fait correspondre la suite Δc, avec, pour tout n, $(\Delta c)_n = c_{n+1} - c_n$ (on pourra, par abus de notation, écrire Δc_n, au lieu de $(\Delta c)_n$).

Δ^r désigne, selon l'usage, pour tout entier r, $(r \in \mathbb{N})$ l'itérée d'ordre r de Δ (avec la convention $\Delta^0 = Id_S$).

a) Soit f une fonction définie sur $[0,1]$, à valeurs réelles, et Riemann-intégrable sur $[0,1]$; on y associe la suite $m = (m_n)_{n\geq 0}$, avec, pour tout n :

$$m_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$$

.../...

Montrer que pour tout entier r, et pour tout entier n, on a :

$$\Delta^r m_n = (-1)^r \int_0^1 t^n (1-t)^r f(t)\, dt$$

(on rappelle que $\Delta^r m_n$ représente le n + 1ème élément de la suite $\Delta^r m$, $m = (m_n)_{n\geq 0}$).

b) Déduire de ce qui précède que si f est une fonction réelle définie sur I, Riemann-intégrable, alors :

$$(\forall x \in [0,1]) \left(\int_0^x f(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{[nx]} C_n^k (-1)^{n-k} \Delta^{n-k} m_k \right).$$

PARTIE IV

On suppose, dans toute cette dernière partie, que I est l'intervalle $[0,+\infty[$.

IV - 1. Montrer que, pour toute fonction $u \in \mathscr{C}_B(I)$, pour tout intervalle fermé borné K de I, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left\{ \sup_{x\in K} \left| u(x) - e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} u\left(\frac{k}{n}\right) \right| \right\} = 0 .$$

IV - 2. On note, comme dans la partie II, $E_{n,x}(u) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} u\left(\frac{k}{n}\right)$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in I$, et $u \in \mathscr{C}_B(I)$.

a) Montrer que :

$$E_{n,x}(u) = \lim_{N\to+\infty} \left[\sum_{p=0}^{N} \frac{(-1)^p (nx)^p}{p!} \right] \left[\sum_{k=0}^{N} \frac{(nx)^k}{k!} u\left(\frac{k}{n}\right) \right]$$ et que :

$$\lim_{N\to+\infty} \left\{ \left[\sum_{p=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} \frac{(nx)^{p+k} u\left(\frac{k}{n}\right)}{p!\,k!} \right] - \left[\sum_{p=0}^{[\frac{1}{2}N]} \sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}N]} \frac{(nx)^{p+k} u\left(\frac{k}{n}\right)}{p!\,k!} \right] \right\} = 0 .$$

b) En déduire que :

$$E_{n,x}(u) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{r=0}^{N} \frac{(nx)^r}{r!} \left(\sum_{p=0}^{r} (-1)^{r-p} C_r^p u\left(\frac{p}{n}\right) \right)$$

IV - 3. Soit h un réel > 0 ; on note Δ_h l'endomorphisme de $\mathscr{F}(I)$ défini par :

$$(\Delta_h f)(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ pour toute fonction $f \in \mathscr{F}(I)$, et pour tout $x \in I$.

Comme dans la partie III, Δ_h^r désigne l'itérée d'ordre r ($r \in \mathbb{N}$) de l'endomorphisme Δ_h.

a) Montrer que pour tout $f \in \mathscr{F}(I)$, pour tout $x \in I$, et pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Delta_h^r f(x) = \frac{1}{h^r} \sum_{p=0}^{r} (-1)^{r-p} C_r^p f(x+ph)$$

b) En déduire que :

$$(\forall u \in \mathscr{C}_B(I)) (\forall x \in I) \left(u(x) = \lim_{N\to+\infty} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} \Delta_{1/N}^r u(0) \right\} \right) .$$

ooooo
ooooo