

I Etude de \mathcal{A}

$$1. \chi_F(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 1 & 0 & -t \end{vmatrix} = 1 - t^3 = (1-t)(j-t)(j^2-t),$$

F a donc 3 valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable.

2. a/ $\mathcal{A} = \text{Vect}(I, F, F^2)$ et est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3\mathbb{R}$.
 (I, F, F^2) est une famille génératrice de \mathcal{A} , montrons qu'elle est libre.

$$xI + yF + zF^2 = 0 \text{ donne } \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et donc : } x = y = z = 0.$$

\mathcal{A} est donc de dimension 3 et admet (I, F, F^2) comme base.

- b/ Remarquons que $F^3 = I$ et calculons :

$$\begin{aligned} (xI + yF + zF^2)(x'I + y'F + z'F^2) &= (xx' + yz' + zy')I + (xy' + yx' + zz')F + (xy' + yy' + zx')F^2 \\ &= (x'x + y'z + z'y)I + (x'y + y'x + z'z)F + (x'z + y'y + z'x)F^2 \\ &= (x'I + y'F + z'F^2)(xI + yF + zF^2) \end{aligned}$$

Le produit de 2 éléments de \mathcal{A} appartient à \mathcal{A} et le produit dans \mathcal{A} est commutatif.

On pourrait d'ailleurs montrer que \mathcal{A} est une sous-algèbre de l'ensemble des matrices carrées.

3. Soit (λ, u) un couple valeur propre, vecteur propre de F . u est aussi propre pour I pour la valeur propre 1 et propre pour F^2 pour la valeur propre λ^2 .

$$\text{Donc : } (xI + yF + zF^2)u = (x + y\lambda F + z\lambda F^2)u,$$

ce qui signifie que u est propre pour $(xI + yF + zF^2)$ et pour la valeur propre : $x + y\lambda + z\lambda^2$.

Une base de vecteurs propres de F diagonalise $(xI + yF + zF^2)$ et diagonalise donc tous les éléments de \mathcal{A} .

Les valeurs propres de F , distinctes ou confondues, sont donc : $x + y + z$, $x + yj + zj^2$, et $x + yj^2 + zj$.

4. Le déterminant de A est donc le produit de ces valeurs propres :

$$\det A = (x + y + z)(x + yj + zj^2)(x + yj^2 + zj).$$

Et enfin, A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul,

$$\text{c'est à dire : } (x + y + z)(x + yj + zj^2)(x + yj^2 + zj) \neq 0.$$

5. a/ On sait déjà que si $A \in \mathcal{A}$ et $M \in \mathcal{A}$, alors $AM \in \mathcal{A}$.

$$\text{De plus, } \Phi \text{ est bien linéaire : } \Phi(\lambda M + \mu P) = A(\lambda M + \mu P) = \lambda AM + \mu AP = \lambda \Phi(M) + \mu \Phi(P).$$

Φ est donc bien un endomorphisme de \mathcal{A} .

- b/ Si $AM = 0$, comme A est inversible, $M = 0$, ce qui prouve que Φ est injective.

Comme on est en dimension finie, Φ est un isomorphisme de \mathcal{A} .

Et comme $I \in \mathcal{A}$, I a un antécédant dans \mathcal{A} , et cet antécédant est A^{-1} , finalement : $A^{-1} \in \mathcal{A}$.

- c/ La méthode proposée est de prendre une matrice de \mathcal{A} , de calculer $B = A^{-1}$

et de calculer $B - B[1, 1]I - B[1, 2]F - B[1, 3]F^2$, il suffit ensuite de comparer ce résultat à la matrice nulle. Tout ceci en calcul formel exact... L'énoncé ne demande qu'une méthode...

II Etude d'une surface

1. On a déjà calculé le déterminant, \mathcal{S} est donc d'équation : $(x + y + z)(x + yj + zj^2)(x + yj^2 + zj) = 1$, ou encore, en développant et en utilisant $1 + j + j^2 = 0$:

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = (x + y + z) \frac{1}{2} ((x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2) = 1.$$

$$\text{Ce qui donne : } q(x, y, z) = \frac{1}{2} ((x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2).$$

On a facilement : $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} = x + y + z$ et aussi, $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}$ est de coordonnées : $\begin{pmatrix} y - z \\ z - x \\ x - y \end{pmatrix}$.

Et donc : $\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}\|^2 = (y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2$.

L'équation de \mathcal{S} est donc bien : $\frac{1}{2} (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a}) \|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}\|^2 = 1$.

2. En utilisant le point H défini par l'énoncé, on a : $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} = \overrightarrow{OH} \cdot \vec{a}$,
et aussi : $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{a}$, ces deux vecteurs étant orthogonaux.

Ce qui donne : $\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}\|^2 = \|\overrightarrow{HM}\|^2 \|\vec{a}\|^2$.

L'équation de \mathcal{S} en utilisant H devient : $\frac{1}{2} (\overrightarrow{OH} \cdot \vec{a}) \|\overrightarrow{HM}\|^2 \|\vec{a}\|^2 = 1$.

Ce qui prouve que si $M \in \mathcal{S}$, tout point M' du cercle d'axe Δ passant par M est contenu dans \mathcal{S} car H , le centre du cercle, est alors le même pour M et M' et $\|\overrightarrow{HM}\|^2 = \|\overrightarrow{HM'}\|^2$.

3. a/ Remarquons d'abord que $\|\vec{a}\| = \sqrt{3}$.

On a ensuite : $\overrightarrow{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$. et donc : $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} = Z \|\vec{a}\| = Z\sqrt{3}$.

D'autre part : $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} = (X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}) \wedge \sqrt{3}\vec{K} = \sqrt{3}(-X\vec{I} + Y\vec{J})$.

D'où : $\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}\|^2 = 3(X^2 + Y^2)$.

L'équation de \mathcal{S} devient : $\frac{3\sqrt{3}}{2} Z (X^2 + Y^2) = 1$.

- b/ On obtient la méridienne du plan YOZ en faisant $X = 0$ dans l'équation.

Ce qui donne : $\frac{3\sqrt{3}}{2} ZX^2 = 1$. C'est une courbe de Riemann très facile à tracer, comme il est facile de la faire tourner autour de son axe, ceci est laissé au lecteur.

4. a/ On a vu que : $(x''I + y''F + z''F^2) = (xI + yF + zF^2)(x'I + y'F + z'F^2)$
et donc : $\det(x''I + y''F + z''F^2) = \det(xI + yF + zF^2) \det(x'I + y'F + z'F^2) = 1$
puisque M et M' sont dans \mathcal{S} . Ceci prouve qu'alors $M'' \in \mathcal{S}$.

On a bien défini « $*$ » une loi de composition interne dans \mathcal{S} .

- b/ Si $M \in \mathcal{S}$, alors $A \in \mathcal{A}$, d'où A est inversible et $A^{-1} \in \mathcal{A}$.

On a donc : $A^{-1} = x'I + y'F + z'F^2$ et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = 1$.

Ceci prouve que $M'(x', y', z') \in \mathcal{S}$.

Enfin, $AA^{-1} = 1I = I + 0F + 0F^2$, d'où $M * M'$ est le point de coordonnées $(1, 0, 0)$.

- c/ - $*$ est une loi de composition interne dans \mathcal{S} ,

- $*$ est commutative car le produit dans \mathcal{A} est commutatif :

$$(xI + yF + zF^2)(x'I + y'F + z'F^2) = (x'I + y'F + z'F^2)(xI + yF + zF^2).$$

$M * M'$ et $M' * M$ ont les mêmes coordonnées.

- elle possède un élément neutre I_0 de coordonnées $(1, 0, 0)$, ceci provient de ce que I est élément neutre du produit des matrices,

- on vient de prouver au b/ que tout élément possède un symétrique,

- enfin, $*$, est associative dans \mathcal{S} . Ce qu'on va démontrer en utilisant l'associativité du produit matriciel et la bijection canonique entre \mathcal{A} et \mathcal{S} .

Soient $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$, $M''(x'', y'', z'') \in \mathcal{S}$,

$(M * M') * M''$ est associé à

$$\begin{aligned} & [(xI + yF + zF^2)(x'I + y'F + z'F^2)](x''I + y''F + z''F^2) \\ &= (xI + yF + zF^2)[(x'I + y'F + z'F^2)(x''I + y''F + z''F^2)] \end{aligned}$$

qui est associé à $M * (M' * M'')$.

On a donc bien : $(M * M') * M'' = M * (M' * M'')$.

$(\mathcal{S}, *)$ a bien une structure de groupe commutatif.

5. a/ \mathcal{C} est une parallèle de \mathcal{S} , c'est donc un cercle.

Le centre est de coordonnées vérifiant aussi $x = y = z$, il est donc de coordonnées : $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Le rayon est la distance de M à Δ , c'est à dire : $\frac{\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}\|}{\|\vec{a}\|} =$, de plus, $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} = 1$,

donc $\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}\|^2 = 2$, et le rayon est : $R = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

b/ $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow M \in \mathcal{S}$ et $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} = 1$

\mathcal{S} est déjà stable pour la loi $*$, il suffit donc de montrer que si $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} = 1$ et $\overrightarrow{OM'} \cdot \vec{a} = 1$ alors : $\overrightarrow{OM''} \cdot \vec{a} = 1$.

Calculons $\overrightarrow{OM''} \cdot \vec{a} = x'' + y'' + z''$

$= xx' + yz' + zy' + xy' + yx' + zz' + xz' + yy' + zx' = (x + y + z)(x' + y' + z') = 1$.

\mathcal{C} est stable pour la loi $*$.

\mathcal{C} est clairement non vide, pour montrer que \mathcal{C} est un sous-groupe, il suffit de vérifier que si $M \in \mathcal{C}$, son inverse aussi.

Comme \mathcal{S} est un groupe, cela revient donc ici à montrer que si $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} = 1$, on inverse M' vérifie aussi : $\overrightarrow{OM'} \cdot \vec{a} = 1$

On sait que les coordonnées de M et M' vérifient :

$xx' + yz' + zy' = 1$, $xy' + yx' + zz' = 0$ et $xz' + yy' + zx' = 0$

d'où : $xx' + yz' + zy' + xy' + yx' + zz' + xz' + yy' + zx' = 1$

et donc : $(x + y + z)(x' + y' + z') = 1$ et enfin : $(x' + y' + z') = 1$.

On a bien M' , l'inverse de M qui vérifie $M' \in \mathcal{C}$ dès que $M \in \mathcal{C}$ et donc : \mathcal{C} est un sous groupe pour la loi $*$.

III Problème d'extrémum

1. On a : $\varphi(O) = \|\overrightarrow{OO}\| + \|\overrightarrow{OA}\| + \|\overrightarrow{OB}\| + \|\overrightarrow{OC}\| = 0 + 1 + 1 + 1 = 3$.

Si $\|\overrightarrow{OM}\| > 3$, alors : $\|\overrightarrow{OM}\| + \|\overrightarrow{AM}\| + \|\overrightarrow{BM}\| + \|\overrightarrow{CM}\| > 3$, car les normes sont positives.

Notons d'abord que φ est continue.

Sur le fermé-borné tel que $\|\overrightarrow{OM}\| \leq 3$, φ est donc bornée et admet un minimum qu'elle atteint, ce minimum est nécessairement inférieur ou égal à 3.

Si $\|\overrightarrow{OM}\| > 3$, alors : $\varphi(M) > 3$.

La borne inférieure de la fonction à l'extérieur de la sphère de rayon 3 est donc plus grande que le minimum à l'intérieur.

φ admet donc un minimum qu'elle atteint dans la sphère de rayon 3.

2. $\varphi(x, x, x) = \sqrt{3x^2} + 3\sqrt{2x^2 + (x-1)^2} = \sqrt{3}|x| + 3\sqrt{3x^2 - 2x + 1} = \Phi(x)$.

Φ est continue en 0, dérivable à droite et à gauche. La dérivée de $\sqrt{3x^2 - 2x + 1}$ est $\frac{3x-1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}$ qui vaut -1 en 0.

La dérivée de Φ à droite en 0 est donc : $\sqrt{3} - 3 < 0$, et sa dérivée à gauche est : $-\sqrt{3} - 3 < 0$.

D'où Φ est décroissant au voisinage de 0 et O n'est pas un extrémum de φ .

Par ailleurs $\varphi(A) = \varphi(B) = \varphi(C) = 1 + 2\sqrt{2} > 3$.

Ni A , ni B , ni C ne sont non plus des extrémums de φ .

3. Comme O est fixe, on a $\vec{r}(\vec{i}) = \vec{r}(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{Or(A)} = \overrightarrow{OC} = \vec{k}$.

De même, $\vec{r}(\vec{j}) = \vec{r}(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{Or(B)} = \overrightarrow{OA} = \vec{i}$.

Et enfin, $\vec{r}(\vec{k}) = \vec{r}(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{Or(C)} = \overrightarrow{OB} = \vec{j}$.

La matrice de \vec{r} dans la base canonique \mathcal{B} est bien F . Cette base est orthonormale et la matrice F est orthogonale. \vec{r} est bien une isométrie vectorielle.

Son déterminant vaut 1, c'est une isométrie directe, une rotation vectorielle.

L'axe est dirigé par \vec{a} car $\vec{r}(\vec{a}) = \vec{a}$.

L'angle θ a son cosinus donné par la trace de F , $1 + 2 \cos \theta = 0$, c'est à dire : $\cos \theta = -\frac{1}{2}$.

Le signe du sinus est donné, par exemple, par le signe de $\det(\vec{i}, \vec{r}(\vec{i}), \vec{a}) = \det(\vec{i}, \vec{k}, \vec{a}) = -1$.

D'où $\theta = -\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

\vec{r} est la rotation d'axe dirigé par \vec{a} et d'angle $-\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

Et enfin, r est la rotation affine d'axe (O, \vec{a}) , orienté par \vec{a} , et d'angle $-\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

4. On a $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{Or(M)} = r(O)r(M) = \vec{r}(\overrightarrow{OM})$, et donc : $\|\overrightarrow{OM'}\| = \|\vec{r}(\overrightarrow{OM})\| = \|\overrightarrow{OM}\|$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{B'M'} = \vec{r}(\overrightarrow{BM})$, et donc : $\|\overrightarrow{AM'}\| = \|\overrightarrow{BM}\|$

De même, $\|\overrightarrow{BM'}\| = \|\overrightarrow{CM}\|$, et enfin : $\|\overrightarrow{CM'}\| = \|\overrightarrow{AM}\|$

Ce qui donne : $\varphi(M') = \|\overrightarrow{OM'}\| + \|\overrightarrow{AM'}\| + \|\overrightarrow{BM'}\| + \|\overrightarrow{CM'}\| = \|\overrightarrow{OM}\| + \|\overrightarrow{BM}\| + \|\overrightarrow{CM}\| + \|\overrightarrow{AM}\| = \varphi(M)$

5. a/ $\overrightarrow{OP'} = \vec{r}(\overrightarrow{OP})$, ces deux vecteurs ne sont colinéaires que si \overrightarrow{OP} est propre pour \vec{r} , c'est à dire si et seulement si P est sur la droite Δ .

Remarquons au passage que cela prouve que : $\|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}\| < \|\overrightarrow{OP}\| + \|\overrightarrow{OP'}\|$.

On utilise pour cela le cas d'inégalité stricte de l'inégalité triangulaire.

b/ On a $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OP''})$.

De même, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{AP''})$ et on a encore la propriété avec B et C .

Ce qui donne : $\varphi(Q) = \left\| \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OP''}) \right\| + \left\| \frac{1}{3}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{AP''}) \right\| + \left\| \frac{1}{3}(\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BP'} + \overrightarrow{BP''}) \right\| + \left\| \frac{1}{3}(\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CP'} + \overrightarrow{CP''}) \right\|$.

D'où, par inégalité triangulaire : $\varphi(Q) \leq \frac{1}{3}(\|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}\| + \|\overrightarrow{OP''}\| + \|\overrightarrow{AP}\| + \|\overrightarrow{AP'}\| + \|\overrightarrow{AP''}\| + \|\overrightarrow{BP}\| + \|\overrightarrow{BP'}\| + \|\overrightarrow{BP''}\| + \|\overrightarrow{CP}\| + \|\overrightarrow{CP'}\| + \|\overrightarrow{CP''}\|)$.

On a même une inégalité stricte : $\varphi(Q) < \frac{1}{3}(\|\overrightarrow{OP}\| + \|\overrightarrow{OP'}\| + \|\overrightarrow{OP''}\| + \|\overrightarrow{AP}\| + \|\overrightarrow{AP'}\| + \|\overrightarrow{AP''}\| + \|\overrightarrow{BP}\| + \|\overrightarrow{BP'}\| + \|\overrightarrow{BP''}\| + \|\overrightarrow{CP}\| + \|\overrightarrow{CP'}\| + \|\overrightarrow{CP''}\|)$.

On a bien : $\varphi(Q) < \frac{1}{3}(\varphi(P) + \varphi(P') + \varphi(P''))$.

On a montré l'inégalité stricte demandée à la question suivante.

c/ On remplace maintenant, dans la dernière inégalité, les vecteurs par des vecteurs de même norme : $\varphi(Q) < \frac{1}{3}(\|\overrightarrow{OP}\| + \|\overrightarrow{OP}\| + \|\overrightarrow{OP}\|)$

$$+ \left(\|\vec{AP}\| + \|\vec{BP}\| + \|\vec{CP}\| + \|\vec{BP}\| + \|\vec{CP}\| + \|\vec{AP}\| + \|\vec{CP}\| + \|\vec{AP}\| + \|\vec{BP}\| \right)$$

Et finalement : $\varphi(Q) < \varphi(P)$, on a ici directement montré l'inégalité stricte.

Par symétrie, $Q \in \Delta$, ce qui prouve que φ atteint donc son minimum sur Δ et pas ailleurs.

6. a/ Si $x < 0$, alors $\Phi(x) = \sqrt{3}|x| + 3\sqrt{2x^2 + (x-1)^2} > 3\sqrt{2x^2 + (x-1)^2} > 3\sqrt{(x-1)^2} = 3|1-x| > 3$.

On a bien : $\Phi(x) > \Phi(0)$.

- b/ Pour $x \geq 0$, on a : $\Phi(x) = \sqrt{3}|x| + 3\sqrt{2x^2 + (x-1)^2} = x\sqrt{3} + 3\sqrt{3x^2 - 2x + 1}$.

Φ est donc dérivable et $\Phi'(x) = \sqrt{3} + 3 \frac{3x-1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}$.

$\Phi'(x) = 0$ pour $3x^2 - 2x + 1 = 3(3x-1)^2$ avec $3x-1 \leq 0$,

ou encore : $12x^2 - 8x + 1 = 0$ toujours avec $3x-1 \leq 0$.

Il y a une solution unique $x = \frac{1}{6}$, l'autre solution $\frac{1}{2}$ ne convenant pas car alors $3x-1 > 0$.

Par ailleurs, $\Phi\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} + 3 \frac{\sqrt{27}}{6} = \frac{10\sqrt{3}}{6} = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

On obtient le tableau de variation :

x	0	$\frac{1}{6}$	$+\infty$
$\Phi'(x)$		- 0 +	
$\Phi(x)$	3	$\searrow \frac{5}{\sqrt{3}} \nearrow$	$+\infty$