

Corrigé Mathématiques 2 CCP 2002

Partie I

$$1. \forall \theta \in J, V = \alpha - \left(\vec{i}, \vec{u}(\theta) \right) \text{ modulo } 2\pi \\ = 3\theta + \frac{\pi}{2} - \theta \text{ modulo } \pi$$

D'où :

$$\boxed{V = 2\theta + \frac{\pi}{2} \text{ modulo } \pi}$$

$$2. \text{ L'on sait que } V = 2\theta + \frac{\pi}{2} \text{ modulo } \pi \Leftrightarrow \begin{vmatrix} f'(\theta) & \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ f(\theta) & \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{vmatrix} = 0 \text{ (puisque } \Gamma \text{ est régulière et} \\ \left(\begin{matrix} f'(\theta) \\ f(\theta) \end{matrix} \right) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$$

$\Leftrightarrow f'(\theta) \cos(2\theta) + f(\theta) \sin(2\theta) = 0$ où f est une solution non nulle (courbe non réduite au pôle). Donc :

$$\boxed{V = 2\theta + \frac{\pi}{2} \text{ modulo } \pi \Leftrightarrow f \text{ est une solution non nulle de } \mathcal{E} : f'(\theta) \cos(2\theta) + f(\theta) \sin(2\theta) = 0}$$

3. \mathcal{E} est une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène. L'ensemble de ses solutions définies sur un intervalle sur lequel $\cos(2\theta)$ ne s'annule pas est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par une solution ne s'annulant pas.

Cherchons ses solutions définies sur $\left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[:$

$$\mathcal{E} \Leftrightarrow (f'(\theta) + f(\theta) \tan(2\theta)) \exp\left(-\frac{1}{2} \ln(\cos(2\theta))\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall \theta \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[, \frac{f(\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} = C. \text{ d'où } \underline{\text{les solutions ne s'annulent pas de } \mathcal{E} :}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta \rightarrow C\sqrt{\cos(2\theta)} \end{matrix} \text{ où } C \in \mathbb{R}^*.$$

$$4. C_\lambda \text{ a pour équation } \rho = \lambda\sqrt{\cos(2\theta)}, \theta \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[.$$

C_μ se déduit alors de C_λ par une homothétie de centre O et de rapport $\frac{\mu}{\lambda}$.

5. Si f est une solution non nulle de \mathcal{E} définie sur \mathbb{R} , il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(\theta_0) \neq 0$ et comme f est dérivable sur \mathbb{R} , elle est continue sur \mathbb{R} et ne s'annule pas sur un voisinage de θ_0 , on peut donc supposer $\theta_0 \neq \frac{\pi}{4} \text{ modulo } \frac{\pi}{2}$ et que $\theta_0 \in \left] -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right[= I_k$.

$f|_{I_k}$ est donc solution de \mathcal{E} et $\exists C \in \mathbb{R}^*, \forall \theta \in I_k, f(\theta) = C\sqrt{|\cos(2\theta)|}$.

D'où $\forall \theta \in I_k, f'(\theta) = -C\varepsilon \frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{|\cos(2\theta)|}}$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et $\lim_{\theta \rightarrow \left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)^-} |f'(\theta)| = +\infty$. D'où f n'est pas

dérivable en $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, ce qui contredit le fait que f soit solution de \mathcal{E} .

Donc, il n'existe pas de solution non nulle de \mathcal{E} définie sur \mathbb{R} .

6.1. L'on sait que les coefficients du développement en série entière sont ceux du développement limité en 0 de f_1 .

On peut donc poser $\forall \theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $f_1(\theta) = 1 + b\theta + c\theta^2 + d\theta^3 + o(\theta^3)$. (puisque $f_1(0) = 1$)

On a alors :

$$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[, f_1'(\theta) \cos(2\theta) + f_1(\theta) \sin(2\theta) = 0 \Rightarrow$$

$$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[, (b + 2c\theta + 3d\theta^2 + o(\theta^2)) \left(1 - \frac{4\theta^2}{2} + o(\theta^2)\right) + (1 + b\theta + c\theta^2 + o(\theta^2)) (2\theta + o(\theta^2)) = 0 \Rightarrow$$

$$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[, b + \theta(2c + 2) + \theta^2(-2b + 3d + 2b) + o(\theta^2) = 0.$$

D'où, par unicité du développement limité :

$$\forall \theta \in]-r, r[, f(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \theta^k \text{ avec } a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = 0.$$

6.2. L'on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \cos(2x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\forall u \in]-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, (1+u)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1-1}{2} \frac{3-2k}{2} \frac{u^k}{k!} + o(u^n)$$

D'où :

$$\forall u \in]-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, (1+u)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2 (2k-1)} u^k + o(u^n)$$

L'on en déduit que :

$$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[, f_1(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)} = \sqrt{1 - 2\theta^2 + o(\theta^3)} \\ = 1 - \theta^2 + o(\theta^3)$$

On a retrouvé les coefficients de la question 6.1.

6.3. f_1 étant C^∞ sur un voisinage de 0, on a $f_1(0) = 1, f_1'(0) = 0, f_1^{(2)}(0) = -2$ et $f_1^{(3)}(0) = 0$, ces dérivées étant données par les coefficients du développement limité en 0.

Partie II

1.1. ρ est défini sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.

$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[, \rho(-\theta) = \rho(\theta)$, ce qui montre : $\begin{cases} - \text{on peut réduire l'étude à } [0, \frac{\pi}{4}[\\ - C_1 \text{ est symétrique par rapport à } (Ox) \end{cases}$

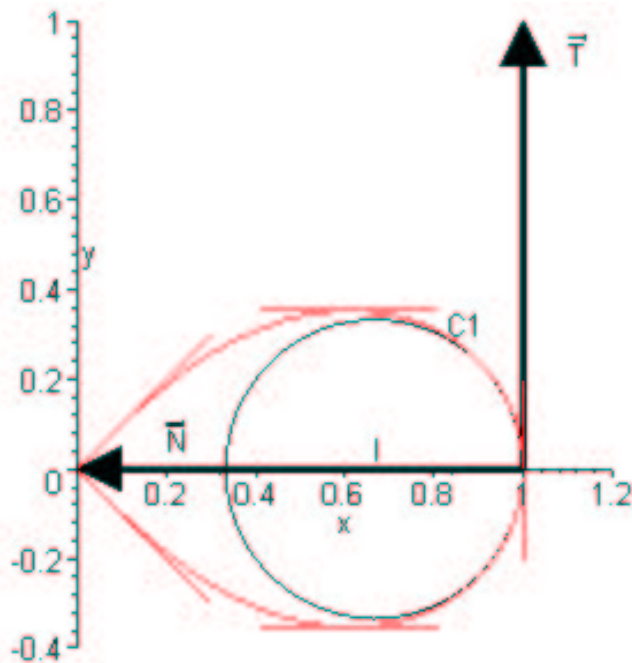
ρ est C^∞ sur $[0, \frac{\pi}{4}[$ et $\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{4}[, \rho'(\theta) = -\frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$.

D'où le tableau de variations de ρ :

θ	0	$\frac{\pi}{4}$
$\rho'(\theta)$	0	-
$\rho(\theta)$	1	0

ρ se prolonge par continuité en $\frac{\pi^-}{4}$ par 0. Donc O est un point d'arrêt de C_1 (passage au pôle) et la tangente en ce point a pour équation polaire $\theta = \frac{\pi}{4}$: c'est la première bissectrice.

D'où la représentation de C_1 :



1.2. L'on a vu que les points de C_1 étaient caractérisés par la propriété $\alpha = 3\theta + \frac{\pi}{2}$ modulo π . Cela est encore vrai pour $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$, valeurs pour lesquelles on obtient $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ ou $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

D'où, pour tout $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, $M(\theta)$ est à tangente horizontale $\Leftrightarrow 3\theta + \frac{\pi}{2} = 0$ modulo π

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} \text{ modulo } \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{6} \text{ puisque } \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

Ces points ont pour rayon vecteur $\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

De même, pour tout $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, $M(\theta)$ est à tangente verticale $\Leftrightarrow 3\theta + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ modulo π

$$\Leftrightarrow \theta = 0 \text{ modulo } \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0$$

Ce point a pour coordonnées cartésiennes $(1, 0)$.

1.3. C_1 est C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ et $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, $\rho(\theta) = 1 - \theta^2 + o(\theta^2)$

On a vu que $\rho(0) = 1$, $\rho'(0) = 0$, $\rho^{(2)}(0) = -2$

Cela montre que, au point d'angle polaire 0, $\vec{T} = \frac{\overrightarrow{M'(0)}}{\|\overrightarrow{M'(0)}\|} = \vec{j}$, $\vec{N} = -\vec{i}$ et $C = \frac{d\alpha}{ds} =$

$$\frac{d\alpha}{d\theta} \times \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^{-1} = 3.$$

Le repère de Frénet en $M(0)$ est donc : $(M(0), \vec{j}, -\vec{i})$

D'où le rayon de courbure en $M(0)$ vaut $R = \frac{1}{3}$ et le centre de courbure I défini par $\overrightarrow{M(0)I} = R\vec{N}$

a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

2. Soit $\varphi : \theta \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$, φ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ et paire. Posons $h = \frac{\pi}{4} - \theta$. On a alors :

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\cos\left(2\left(\frac{\pi}{4} - h\right)\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\sin(2h)}} \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2h}}$$

$$\underset{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{4} - \theta}}. \text{ D'où :}$$

$\int_0^{\pi/4} \varphi(\theta) d\theta$ converge et comme φ est paire, I converge.

3. Notons L_α la longueur de $C_1|_{[-\alpha, \alpha]}$. On a lors $L_\alpha = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left\| \overrightarrow{M'(\theta)} \right\| d\theta$.

$$\text{Or } \forall \theta \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[, \left\| \overrightarrow{M'(\theta)} \right\| = \sqrt{\cos(2\theta) + \frac{(\sin(2\theta))^2}{\cos(2\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}.$$

D'où $L_\alpha = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}} d\theta$. d'après la question précédente, L existe et vaut I .

4.1. Grâce au changement de variables $\varphi = 2\theta$ (justifié car $\theta \rightarrow 2\theta$ est un difféomorphisme de classe C^1 de $\left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$), on obtient :

$$\underline{L} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2\sqrt{\cos(\varphi)}} d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos(\varphi)}} d\varphi.$$

4.2. Grâce au changement de variables $u = \sqrt{\cos(\varphi)}$ (justifié car $\varphi \rightarrow \sqrt{\cos(\varphi)}$ est un difféomorphisme de classe C^1 de $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ sur $]0, 1[$), on obtient :

$$L = \int_1^0 \frac{1}{u} \times \frac{-2u}{\sqrt{1-u^4}} du \text{ car } du = -\frac{\sin(\varphi)}{2\sqrt{\cos(\varphi)}} d\varphi = -\frac{\sqrt{1-u^4}}{2u} d\varphi$$

D'où :

$$\boxed{L = 2 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}}$$

$$\begin{aligned} 5. A &= \iint_{\Delta} dx dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_0^{\sqrt{\cos(2\theta)}} \rho d\rho \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [\rho^2]_0^{\sqrt{\cos(2\theta)}} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \cos(2\theta) d\theta \\ &= \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi/4}. \text{ D'où :} \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}}$$

Partie III

1. $t \xrightarrow{\Psi} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}$ est continue sur $]0, 1[$.

$\Psi(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-\alpha}}$ et $\int_0^{1/2} \Psi(t) dt$ converge $\Leftrightarrow 1-\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$

$\Psi(t) \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{1-\beta}}$ et $\int_{1/2}^1 \Psi(t) dt$ converge $\Leftrightarrow 1-\beta < 1 \Leftrightarrow \beta > 0$. Donc :

$$\boxed{B(\alpha, \beta) \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0}$$

2. $t \rightarrow u = 1-t$ est un difféomorphisme de classe C^1 de $]0, 1[$ sur $]0, 1[$. D'où :

$$\begin{aligned}
B(\alpha, \beta) &= - \int_1^0 (1-u)^{(\alpha-1)} u^{(\beta-1)} du \\
&= \int_0^1 (1-u)^{(\alpha-1)} u^{(\beta-1)} du \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\boxed{B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)}$$

3. $\theta \rightarrow \sin^2(\theta)$ est un difféomorphisme de classe C^1 de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $]0, 1[$. D'où :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2(\alpha-1)}(\theta) (1 - \sin^2(\theta))^{(\beta-1)} 2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{B(\alpha, \beta) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha-1}(\theta) \cos^{2\beta-1}(\theta) d\theta}$$

4. $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{-1/2}(\theta) d\theta$, d'où d'après II.4.1.,

$$\boxed{L = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)}$$

Partie IV

1.1. Pour $n = 1$, on a $\left\{ \begin{array}{l} M_0^1, \text{ d'angle polaire } 0, \text{ a pour coordonnées cartésiennes } (1, 0). \\ M_1^1, \text{ d'angle polaire } \frac{\pi}{4}, \text{ a pour coordonnées cartésiennes } (0, 0) \end{array} \right.$. on a alors :
 $2L_1 = 2$.

Pour $n = 2$, on a $\left\{ \begin{array}{l} M_0^2, \text{ d'angle polaire } 0, \text{ a pour coordonnées cartésiennes } (1, 0). \\ M_1^2, \text{ d'angle polaire } \frac{\pi}{8}, \text{ a pour coordonnées cartésiennes } (x, y) \\ M_2^2, \text{ d'angle polaire } \frac{\pi}{4}, \text{ a pour coordonnées cartésiennes } (0, 0) \end{array} \right.$.

avec $x = \rho\left(\frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $y = \rho\left(\frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Or $\rho\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$ et de même :

$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$. D'où

M_1^2 a pour coordonnées cartésiennes $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}, \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} \right) =$

$$\boxed{\left(\frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{\sqrt{2} - 1}}{2} \right)}$$

Une valeur approchée de $2L_2$ est alors :

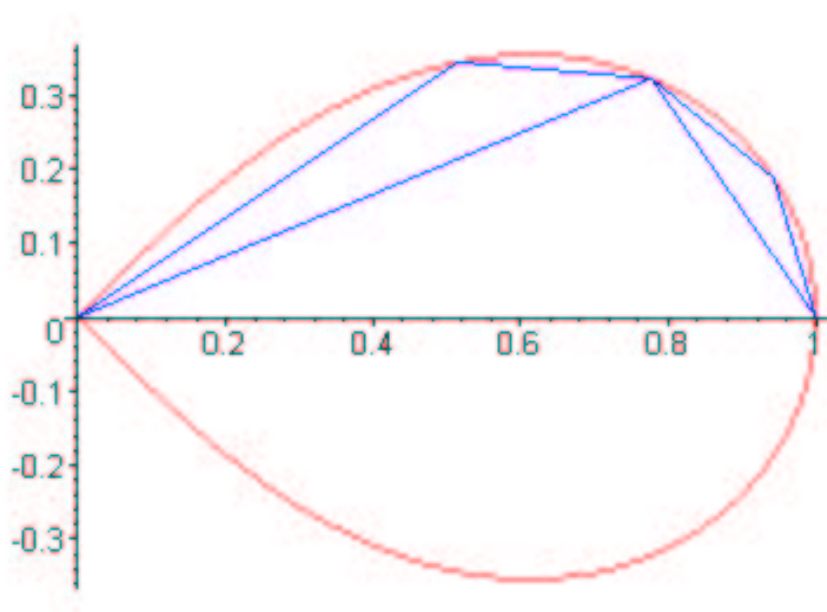
$$2 \left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{\sqrt{2} - 1}}{2} \right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{\sqrt{2} - 1}}{2} \right)^2} \right)$$

$$\approx \underline{2.4649}$$

3. Pour $n = 4$, une calculatrice donne les coordonnées cartésiennes des M_i^4 , $i = 0, \dots, 4$.

k	0	1	2	3	4
θ	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{\pi}{4}$
$\rho(\theta)$	1	0.96	0.84	0.62	0
$x(\theta)$	1	0.94	0.78	0.51	0
$y(\theta)$	0	0.19	0.32	0.34	0

D'où le dessin demandé.



4. Avec MAPLE :

```
f := t -> sqrt(cos(2 * t)) :
```

```
with(linalg) :
```

```
p := 0 : L1 := 1 : L2 := 0 :
```

```
while abs(2 * L1 - 2 * L2) > 10(-3) do
```

```
  L2 := L1; B := [1,0]; p := p + 1; r := 2p; L1 := 0;
```

```
  for k from 1 to r do
```

```
    h := k * Pi/4/r;
```

```
    A := evalf([f(h) * cos(h), f(h) * sin(h)]);
```

```
    L1 := L1 + norm(B - A, 2);
```

```
    B := A;
```

```
  od;
```

```
od :
```

```
n = 2p; I = 2 * L1;
```

$$n = 64$$

$$I = 2.621908274$$

```
evalf(int(1/f(t), t = -Pi/4..Pi/4));
```

2.622057553 (valeur approchée à $1/2 \cdot 10^{-9}$ près)

△△△

Rédigé par

*Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
Lycée Chaptal, 6, allée Chaptal, 22000 StBrieuc
Tel. 0296639414
Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr*

à l'aide de Scientific Workplace