

Partie A : un arc de cercle apparent

1. Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation : $x^2 + y^2 = 1$ clairement vérifiée par les coordonnées du point $M(\theta)$.

2. (a) On a $a \in]1, +\infty[$, donc, $\frac{1}{a} \in]0, 1[$ et enfin : $\omega = \arccos\left(\frac{1}{a}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

(b) Bien évidemment : $\overrightarrow{OM(\omega)} : \begin{pmatrix} \cos(\omega) \\ \sin(\omega) \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{AM(\omega)} = \overrightarrow{OM(\omega)} - \overrightarrow{OA} : \begin{pmatrix} \cos(\omega) - a \\ \sin(\omega) \end{pmatrix}$.

(c) $\omega = \arccos\left(\frac{1}{a}\right)$ donne toujours : $\frac{1}{a} = \cos(\omega)$, avec ici $\cos(\omega) \neq 0$, et donc : $a = \frac{1}{\cos(\omega)}$.

(d) $\overrightarrow{OM(\omega)} \cdot \overrightarrow{AM(\omega)} = \begin{pmatrix} \cos(\omega) \\ \sin(\omega) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega) - a \\ \sin(\omega) \end{pmatrix} = \cos^2(\omega) - a \cos(\omega) + \sin^2(\omega) = 0$

Comme $M(\omega)$ est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O , et que $A \neq M(\omega)$, la droite $(AM(\omega))$ est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

3. (a) $a > 1$, donc le dénominateur ne s'annule jamais, par théorèmes usuels, f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Le numérateur est impair et le dénominateur pair, f est impaire. De plus, elle est 2π -périodique.

(c) On dérive f comme un quotient : $f'(x) = \frac{\cos(x)(\cos(x) - a) + \sin^2(x)}{(\cos(x) - a)^2} = \frac{1 - a \cos(x)}{(\cos(x) - a)^2}$

(d) f' ne s'annule que si $\cos(x) = \frac{1}{a}$, c'est à dire, sur $[0, \pi]$, que pour $x = \omega$.

f' est clairement strictement négative sur $[0, \omega[$ et strictement positive sur $]\omega, \pi]$.

Donc f est strictement décroissante sur $[0, \omega]$ et strictement croissante sur $[\omega, \pi]$.

(e) Attention, on est sur $[-\pi, \pi]$, il faut utiliser l'impairité de f .

Ensuite, on obtient :

x	$-\pi$	$-\omega$	0	ω	π				
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$			
$f(x)$	0	$\nearrow$	$-f(\omega)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(\omega)$	$\nearrow$	0

4. La droite verticale passant par A est d'équation : $x = a > 1$ et ne coupe donc pas le cercle $\mathcal{C}$.

Une droite non verticale est d'équation : $y = \alpha x + \beta$. Elle passe par A si et seulement si $\alpha a + \beta = 0$.

Une droite $\mathcal{D}$, non verticale, passant par A est donc d'équation : $y = \alpha(x - a)$ ou $y = m(x - a)$.

Rien n'assure que cette droite coupe $\mathcal{C}$!

5. $M(\theta) \in \mathcal{D}_m \Leftrightarrow \sin(\theta) = m(\cos(\theta) - a) \Leftrightarrow m = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) - a} = f(\theta)$, le dénominateur est bien non nul !

6. $M(0) : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M(\pi) : \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifient $y = 0$ et sont donc sur $\mathcal{D}_0$.

$-1 < 1$ donc $M(0)$ est visible du point A , contrairement à $M(\pi)$.

7. (a) Soit $m = f(\theta_1) = f(\theta_2)$, donc $M(\theta_1)$ et $M(\theta_2)$ sont sur la droite $\mathcal{D}_m$, comme A , ces trois points sont donc alignés !

(b) Comme $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$, on a : $\cos(\theta_1) \geq \cos(\theta_2)$, donc $M(\theta_1)$ est visible de A , contrairement à $M(\theta_2)$.

(c) f est décroissante puis croissante strictement sur $[0, \pi]$, le minimum est en ω .

Comme $f(\theta_1) = f(\theta_2)$, on a donc $\theta_1 < \omega < \theta_2$.

8. (a) Soit $0 \leq \theta < \omega < \pi$, on considère $\theta' \in [0, \pi]$, $\theta' \neq \theta$, tel que $f(\theta) = f(\theta')$, alors $\theta' > \theta$, et donc $\cos(\theta) > \cos(\theta')$ et enfin $M(\theta)$ visible de A .

Si $\theta = \omega$, il n'y a pas d'autre point d'intersection de la droite et du cercle, donc $M(\theta)$ visible de A .

(b) Soit $0 < \omega < \theta \leq \pi$, on considère $\theta' \in [0, \pi]$, $\theta' \neq \theta$, tel que $f(\theta) = f(\theta')$ alors $\theta' < \theta$, et donc $\cos(\theta) < \cos(\theta')$ et enfin $M(\theta)$ n'est pas visible de A .

9. Pour $\theta \in [-\pi, 0]$, si $\theta \geq -\omega$, $\cos(\theta) \geq \cos(\theta')$, et $M(\theta)$ visible de A .

Si $\theta < -\omega$, $\cos(\theta) < \cos(\theta')$, et $M(\theta)$ n'est pas visible de A .

Partie B : un contour apparent d'une quadrique

1. On calcule le polynôme caractéristique de S : $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1/2 \\ -1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{3}{2} - \lambda\right)$

On a deux valeurs propres simples : $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

2. (a) R est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres, c'est à dire avec une matrice de passage orthogonale, qu'on appelle Ω ici.

On a donc une matrice diagonale D telle que : $D = \Omega^{-1}R\Omega = {}^t\Omega R\Omega$, puisque Ω est orthogonale.

- (b) Compte tenu de ce qu'on a fait sur S , R a trois valeurs propres simples : 3 , $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

Les sous-espaces propres sont donc de dimension 1.

On a donc $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre 1.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre $\frac{1}{2}$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre $\frac{3}{2}$.

Pour avoir Ω , il suffit de normer ces vecteurs dans cet ordre : $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

3. L'équation de Σ est formée d'une forme quadratique constante égale à 1. S est la matrice de cette forme quadratique.

Dans la base orthonormale de vecteurs propres donnée, la forme quadratique vaut donc : $3X^2 + \frac{1}{2}Y^2 + \frac{3}{2}Z^2$.

Dans le repère d'origine O utilisant cette base, Σ a pour équation : $3X^2 + \frac{1}{2}Y^2 + \frac{3}{2}Z^2 = 1$.

Σ est donc un ellipsoïde.

4. (a) On a $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ 3x^2 + y^2 - yz + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} + y^2 - yz + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y^2 - yz + z^2 = \frac{2}{3} \end{cases}$

- (b) Dans le plan $\mathcal{P}$, l'équation de $\mathcal{E}$ revient à une forme quadratique constante.

La matrice de cette forme quadratique est S dont les valeurs propres sont simples : $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

Dans une base orthonormale de vecteurs propres on a donc $y^2 - yz + z^2 = \frac{1}{2}Y^2 + \frac{3}{2}Z^2$.

Dans le repère orthonormal de $\mathcal{P}$ de même origine, associé à ces vecteurs propres,

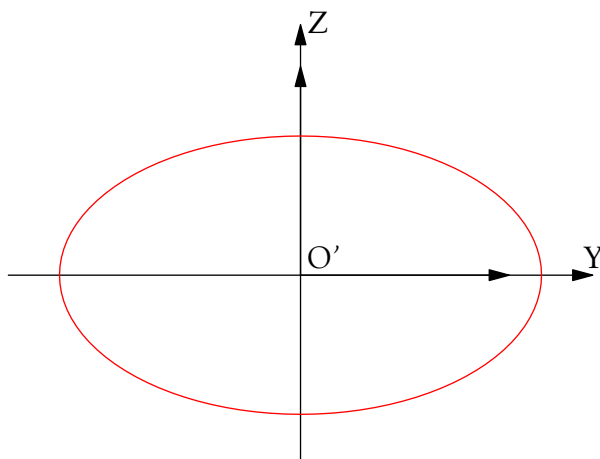
$\mathcal{E}$ a donc pour équation : $\frac{1}{2}Y^2 + \frac{3}{2}Z^2 = \frac{2}{3}$, ou encore : $\frac{3}{4}Y^2 + \frac{9}{4}Z^2 = 1$.

C'est donc une ellipse, ce qui n'est pas étonnant, l'intersection d'un ellipsoïde et d'un plan...

- (c) On réécrit l'équation de $\mathcal{E}$: $\frac{X^2}{\frac{4}{3}} + \frac{Y^2}{4} = 1$.

Dans le repère $(O', \vec{J}, \vec{K})$, les sommets sont donc de coordonnées : $\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$ et $\left(0, \pm \frac{2}{3}\right)$.

La représentation graphique s'obtient facilement alors :



5. (a) $3x^2 = y^2 - yz + z^2$, pour $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, vaut bien 1. Donc $N \in \Sigma$.

(b) Une représentation paramétrique de la droite (NA) et $N + \lambda \overrightarrow{NA}$. C'est à dire :
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

(c) On reporte cette représentation dans l'équation de Σ , on a donc : $3\lambda^2 + (1-\lambda)^2 = 1$, ce qui donne $4\lambda^2 - 2\lambda = 0$, qui a pour solution $\lambda = 0$, c'est le point N et $\lambda = \frac{1}{2}$, c'est un point N' . Les abscisses respectives de ces points sont 0 et $\frac{1}{2}$, donc N n'est pas visible de A tandis que N' l'est.

6. Les coordonnées du gradient de φ en (u, v, w) s'obtiennent très facilement en calculant les dérivées partielles :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_{\varphi}(u, v, w) : \begin{pmatrix} 6u \\ 2v - w \\ -v + 2w \end{pmatrix}$$

7. (a) $3x^2 + y^2 - yz + z^2$, pour $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et $z = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, vaut $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 1$. Donc $B \in \Sigma$.

(b) Le plan tangent Π_B à Σ en B est normal au gradient et passe par B .

Les coordonnées du gradient en B sont :
$$\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Le plan tangent a donc pour équation :
$$2\left(x - \frac{1}{3}\right) + \sqrt{2}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) - \sqrt{2}\left(z + \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 0$$

Ce qui s'écrit encore : $2x + \sqrt{2}y - \sqrt{2}z = 2$.

(c) Les coordonnées de A qui sont $(1, 0, 0)$ vérifient clairement cette équation, donc $A \in \Pi_B$, et enfin $B \in \Gamma$.

8. On établit l'équation du plan tangent en T comme celui en B !

On obtient : $6u(x - u) + (2v - w)(y - v) + (-v + 2w)(z - w) = 0$.

Ou encore : $6ux + (2v - w)y + (-v + 2w)z - 6u^2 + 2v^2 - 2vw + 2w^2 = 6ux + (2v - w)y + (-v + 2w)z - 2 = 0$, car $T \in \Sigma$.

Π_T est bien d'équation $6ux + (2v - w)y + (-v + 2w)z = 2$.

9. Le plan Π_T , tangent à Σ en T contient A si et seulement si $6u = 2$, ou encore $u = \frac{1}{3}$.

C'est à dire si et seulement si le point T vérifie $x = \frac{1}{3}$.

L'ensemble des points T est donc l'intersection de Σ et de $\mathcal{P}$, c'est tout simplement l'ellipse $\mathcal{E}$.