CCINP 2025 MP Mathématiques 1

Proposition de corrigé

Exercice I

Q1. La fonction f étant de classe C^1, sa dérivée f' est continue sur l'intervalle $]-1,1[$, qui est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa topologie naturelle ; par conséquent l'ensemble image $f'(]-1,1[)$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.

Q2. **a)** Les restrictions de la fonction f à chacun des intervalles $]-1,0]$ et $]0,1[$ sont dérivables, en fait de classe C^∞ : il s'agit en effet de fonctions à valeurs dans l'espace produit $\mathbb{R}^2$ dont les composantes sont respectivement constantes ou produits de composées de fonctions de classe C^∞. La dérivabilité étant une propriété locale, f est dérivable en tout point qui est intérieur à l'un de ces deux intervalles : ainsi f est dérivable en tout point de $]-1,1[\setminus\{0\}$, de vecteur dérivé

$$f'(t) = (0,0) \quad \text{si } t \in]-1,0[\qquad \text{et} \qquad f'(t) = \left(2t\sin\frac{1}{t} - \cos\frac{1}{t}, 2t\cos\frac{1}{t} + \sin\frac{1}{t}\right) \quad \text{si } t \in]0,1[$$

de plus f est dérivable à gauche en 0, de vecteur dérivé à gauche égal à $(0,0)$.

Pour $t \in]0,1[$, le taux d'accroissement de f entre 0 et t est $\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0} = \left(t\sin\dfrac{1}{t}, t\cos\dfrac{1}{t}\right)$ et converge vers $(0,0)$ lorsque $t \to 0^+$ (en fait, les deux fonctions composantes sont les produits de la fonction $t \longmapsto t$ qui tend vers 0 et de deux fonctions bornées) ; ainsi f est dérivable à droite de vecteur dérivé à droite égal à $(0,0)$ aussi, et on conclut que f est dérivable en 0 et $f'(0) = (0,0)$.

$$\boxed{\forall t \in]-1,0] \quad f'(t) = (0,0) \qquad \text{et} \qquad \forall t \in]0,1[\quad f'(t) = \left(2t\sin\frac{1}{t} - \cos\frac{1}{t}, 2t\cos\frac{1}{t} + \sin\frac{1}{t}\right)}$$

b) Soit $t \in]0,1[$; on a, en développant et en utilisant la relation de Pythagore entre cos et sin,

$$\|f'(t)\|_2^2 = \left(2t\sin\frac{1}{t} - \cos\frac{1}{t}\right)^2 + \left(2t\cos\frac{1}{t} + \sin\frac{1}{t}\right)^2 = 4t^2 + 1 > 1$$

d'où, par croissance stricte de la fonction racine carrée, $\|f'(t)\|_2 > 1$.

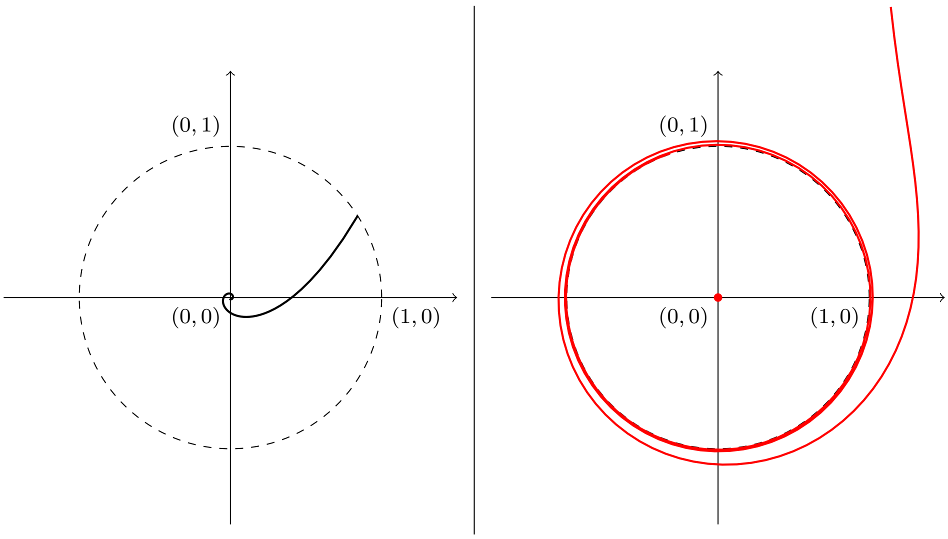

FIGURE 1 – A gauche, la trajectoire Γ du chemin f ; à droite, l'ensemble image Γ' de la dérivée f'. On peut constater que Γ' possède deux composantes connexes par arcs distinctes : le singleton $\{(0,0)\}$, qui est l'image par f' de l'intervalle $]-1,0]$, et l'image par f' de l'intervalle $]0,1[$, qui est une courbe spiralant autour d'un cercle limite (en tirets, c'est la sphère unité pour la norme $\| \|_2$).

On note Γ' l'ensemble image de $]-1,1[$ par la fonction f' (figure 1) et on suppose par l'absurde que Γ' est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$. La norme $\| \, \|_2$ est une application continue de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ (où $\mathbb{R}^2$ est muni de sa topologie naturelle, qui est celle induite entre autres par $\| \, \|_2$; en fait, toute norme est 1-lipschitzienne par rapport à la distance associée), donc l'image J de Γ' par $\| \, \|_2$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Cependant J contient $0 = \|(0,0)\|_2$ et des réels plus grands que 1 (les réels $\|f'(t)\|_2$ pour $t \in \,]0,1[$) mais aucun réel strictement compris entre 0 et 1, donc J n'est pas un intervalle : contradiction. On conclut que Γ' n'est pas connexe par arcs.

Exercice II

Q3. La fonction f est polynomiale, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$; $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2(2-x-y) - 2(1-x) - 4(1-2x-y) = 0 \\ -2(2-x-y) - 2(1-2x-y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 12x + 6y = 10 \\ 6x + 4y = 6 \end{cases}$$

et ce système linéaire est de Cramer, équivalent à $(x,y) = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

$$\boxed{\text{Le seul point critique de } f \text{ est } c = \left(\frac{1}{3}, 1\right).}$$

En tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ la matrice hessienne de f est $\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; on a

$$\det\big(\mathrm{H}f(c)\big) = 12 > 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tr}\,\big(\mathrm{H}f(c)\big) = 16 > 0$$

donc la matrice symétrique réelle $\mathrm{H}f(c)$ possède deux valeurs propres strictement positives : d'après la condition suffisante à l'ordre 2 d'extremum local, le point c est un point de minimum local strict pour f. On admet que $f(c)$ est le minimum global de f ; on a alors

$$f(c) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \frac{4}{3}}$$

Remarque : f est une application polynomiale de degré 2 (ce qui justifie que ses dérivées secondes et sa matrice hessienne sont constantes sur $\mathbb{R}^2$), donc d'après la formule de Taylor au second ordre par rapport au point c on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = f(c) + \underbrace{\langle \nabla f(c) | h \rangle}_{=0} + \frac{1}{2} \langle h | \mathrm{H}f(c)\, h \rangle \geqslant f(c) \qquad \text{où} \quad h = (x,y) - c$$

puisque la matrice $\mathrm{H}f(c)$ est symétrique définie positive : cela justifie que c est l'unique point de minimum de f sur $\mathbb{R}^2$.

Q4. Par définition, b est le projeté orthogonal de a sur le sous-espace vectoriel F si et seulement si $b \in F$ et $a - b \in F^\perp$; or $F = \mathrm{Vect}(u,v)$, donc

$$\begin{cases} b \in F \\ a - b \in F^\perp \end{cases} \iff \begin{cases} \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad b = xu + yv \\ \langle a - b | u \rangle = \langle a - b | v \rangle = 0 \end{cases} \iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} b = xu + yv \\ x \langle u|u \rangle + y \langle v|u \rangle = \langle a|u \rangle \\ x \langle u|v \rangle + y \langle v|v \rangle = \langle a|v \rangle \end{cases}$$

$$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} b = xu + yv \\ 6x + 3y = 5 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases} \iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} b = xu + yv \\ (x,y) = \left(\frac{1}{3}, 1\right) \end{cases}$$

donc $\boxed{b = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)}$

On constate que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \|a - (xu + yv)\|^2$; lorsque (x,y) décrit $\mathbb{R}^2$, le vecteur $xu + yv$ décrit $\mathrm{Vect}(u,v) = F$, donc la borne inférieure de f est le carré de la distance du vecteur a au sous-espace vectoriel F. On sait que la distance d'un vecteur a à un sous-espace vectoriel F d'un espace préhilbertien est atteinte en le projeté orthogonal b de a sur F (*conséquence de la relation de Pythagore : pour tout $w \in F$, $a - b \in F^\perp$ et $b - w \in F$ d'où $\|a - w\|^2 = \|a - b\|^2 + \|b - w\|^2 \geqslant \|a - b\|^2$*), donc

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \|a - b\|^2 = \left\| \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \right\|^2 \qquad \text{et on retrouve} \qquad \boxed{\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \frac{4}{3}}$$

Problème. Autour du théorème de comparaison avec une intégrale

Partie I – Théorème de comparaison avec une intégrale

Q5. La fonction f est positive, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_{n+1} - S_n = f(n+1) \geqslant 0$: cela établit que

$$\boxed{\text{la suite } (S_n) \text{ est croissante.}}$$

Par positivité de l'intégrale sur un segment et par la relation de Chasles, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a aussi

$$J_{n+1} - J_n = \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{la suite } (J_n) \text{ est croissante.}}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$; on a

$$\forall t \in [\,k-1, k\,] \quad f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k-1)$$

puisque f est décroissante, donc par croissance de l'intégrale sur le segment $[\,k-1, k\,]$ on obtient

$$f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(k-1)\,\mathrm{d}t = f(k-1).$$

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par croissance de la somme sur $[\![1, n]\!]$, en utilisant l'encadrement établi en **Q5.** on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k-1)$$

Or $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = \sum\limits_{k=0}^{n} f(k) - f(0) = S_n - f(0)$ et, par changement d'indice, $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k-1) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} f(j) = S_{n-1}$; enfin $\sum\limits_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = J_n$ (relation de Chasles) et on aboutit à l'encadrement souhaité.

Q7. (1) La fonction f est continue et positive, donc f est intégrable si et seulement si la fonction

$$F : x \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est majorée sur $\mathbb{R}^+$. D'une manière analogue, la série $\sum f(n)$ est à termes positifs, donc elle est convergente si et seulement si la suite (S_n) de ses sommes partielles est majorée.
On suppose que f est intégrable. Dans ce cas F est majorée par un réel M (on peut prendre $M = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$), donc la suite de terme général $J_n = F(n)$ est majorée par M aussi ; d'après **Q6.**, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n \leqslant J_n + f(0)$ d'où $S_n \leqslant M + f(0)$. Ainsi la suite des sommes partielles de la série $\sum f(n)$ est majorée, donc cette série est convergente.
On suppose, réciproquement, que la série $\sum f(n)$ est convergente ; dans ce cas la suite (S_n) est majorée par un réel M' (on peut prendre $M' = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f(k)$). Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on note $n = \lfloor x \rfloor + 1$, de sorte que $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \leqslant n$: on a

$$J_n = \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^n f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) + \int_x^n f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(relation de Chasles)}$$

et, par positivité de l'intégrale, $\int_x^n f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$; d'après **Q6.** il résulte que

$$F(x) \leqslant J_n \leqslant S_{n-1} \leqslant M'.$$

Ainsi la fonction F est majorée, donc f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
(2) D'après **Q5.**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$(*) \qquad 0 \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \leqslant f(n-1) - f(n)$$

La série télescopique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\big(f(n-1)-f(n)\big)$ est de même nature que la suite $(f(n))$; or la fonction f est positive et décroissante, donc la suite $(f(n))$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge ; par conséquent la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\big(f(n-1)-f(n)\big)$ est convergente. D'après $(*)$, par majoration terme à terme, la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 1}\Big(\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)\Big)$ converge aussi.

Q8. **a)** La fonction ln est croissante et strictement positive sur $[\,2,+\infty\,[$, et la fonction $t\longmapsto t^{-\alpha}=\dfrac{1}{t^{\alpha}}$ est décroissante sur $]\,0,+\infty\,[$, donc la composée $x\longmapsto\dfrac{1}{(\ln x)^{\alpha}}$ est positive et décroissante sur $[\,2,+\infty\,[$; la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{x}$ est elle aussi continue, positive et décroissante sur $[\,2,+\infty\,[$. L'ensemble des fonctions continues, positives et décroissantes sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est stable par multiplication, donc la fonction f est continue, positive et décroissante sur $[\,2,+\infty\,[$.

Si $\alpha\neq 1$, la fonction f admet comme primitive la fonction $F:x\longmapsto\dfrac{(\ln x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$; si $\alpha=1$, f admet comme primitive $F:x\longmapsto\ln(\ln x)$. Étant donné $x\in[\,2,+\infty\,[$, d'après le théorème fondamental de l'analyse on a

$$\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t=\big[F(t)\big]_2^x \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{(\ln x)^{1-\alpha}-(\ln 2)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha\neq 1,\\ \ln(\ln x)-\ln(\ln 2) & \text{si } \alpha=1\end{cases}}$$

On constate que la fonction $x\longmapsto\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t$ converge en $+\infty$ si et seulement si $\alpha>1$, donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente (ou, de manière équivalente puisque f est positive, f est intégrable sur $[\,2,+\infty\,[$) si et seulement si $\alpha>1$.
En appliquant le résultat (1) de **Q7.** à la fonction translatée $\tilde f:x\longmapsto f(x+2)$, on déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f(n+2)$ converge si et seulement si la fonction $\tilde f$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, autrement dit f est intégrable sur $[\,2,+\infty\,[$; on peut donc conclure :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}} \text{ est convergente si et seulement si } \alpha>1.}$$

b) On reprend **Q6.**, dans le cas où la fonction f est intégrable : par passage à la limite pour $n\to+\infty$ (justifié car l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et d'après **Q7.**(1) la série $\sum f(n)$ est convergente), on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f(k)-f(0)\leqslant\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \quad \text{d'où} \quad \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty} f(k)\leqslant\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t+f(0)$$

On va appliquer ce qui précède à la fonction $\tilde f:x\longmapsto f(x+2)$ où f est définie sur $[\,2,+\infty\,[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$: d'après (a) la fonction f est intégrable et

$$\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\ln x)^{-1}-(\ln 2)^{-1}}{-1}\right)=\frac{1}{\ln 2}$$

donc $$\boxed{\frac{1}{\ln 2}\leqslant\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}\leqslant\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{2(\ln 2)^2}}$$

Q9. **a)** On pose la fonction $f:x\longmapsto\dfrac{1}{x+1}$, qui est continue, positive et décroissante sur $[\,0,+\infty\,[$; pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t-f(k)\Big)&=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}=\int_0^{n-1}\frac{\mathrm{d}t}{t+1}-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\\&=\ln(n)-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}+1=1-T_n\end{aligned}$$

D'après **Q7.**(2) la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\Big(\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k)\Big)$ converge, donc la suite de ses sommes partielles est convergente ; ainsi la suite $(1-T_n)_{n\geqslant 1}$ converge, et on conclut que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge aussi.

b) Par définition $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} T_n$; de manière équivalente :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n = T_n = \gamma + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1) \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)$$

La suite (T_n) est convergente, donc bornée, et a fortiori négligeable devant $(\ln n)$ qui diverge vers $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n = T_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\ln n) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n}$$

Q10. a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $\|g_n\|_\infty \geqslant |g_n(n)| = \dfrac{1}{2n} > 0$; la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ est divergente, donc par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\|g_n\|_\infty$ est divergente aussi :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} g_n \text{ n'est pas normalement convergente (sur }]\,0,+\infty\,[).}$$

b) La fonction f est continue positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$; pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $k\in[\![1,n]\!]$, en appliquant **Q5.** en k et $k+1$, on obtient

$$\int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

puis par croissance de la somme sur $[\![1,n]\!]$ et en utilisant la relation de Chasles on obtient

$$\int_{1}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

c) La fonction f est continue sur $[\,0,+\infty\,[$ et $f(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$; par comparaison à la fonction $t\longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ qui est intégrable sur $[\,1,+\infty\,[$ (critère de Riemann), il résulte que f est intégrable sur $[\,0,+\infty\,[$. On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $a\in\{0,1\}$ convergent, et d'après **Q7.**(1) (appliqué à la fonction $x\longmapsto f(x+1)$) la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} f(k)$ converge aussi ; on peut donc licitement passer à la limite pour $n\to+\infty$ l'encadrement établi en (b) :

$$\int_{1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Cela prouve en passant la convergence simple sur $]\,0,+\infty\,[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$; en outre, toujours pour $x\in\,]\,0,+\infty\,[$ fixé, une primitive de la fonction f est $F : t\longmapsto \arctan\left(\dfrac{t}{x}\right)$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse généralisé à un intervalle quelconque

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_{t=0}^{+\infty} = \lim_{+\infty}\arctan - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{et} \qquad \int_{1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_{t=1}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}$$

et on obtient l'encadrement voulu.

d) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, en appliquant le théorème de convergence par encadrement au résultat de (c) on obtient $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \dfrac{\pi}{2}}$

D'autre part pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $g_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$, et on remarque que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\lim_{x\to+\infty} g_n(x)\Big) = 0 \neq \frac{\pi}{2} = \lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$$

D'après la contraposée du théorème de la double limite on déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ ne converge pas uniformément au voisinage de $+\infty$, et a fortiori

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} g_n \text{ ne converge pas uniformément sur }]\,0,+\infty\,[.}$$

Partie II – Contre-exemples

Q11. **a)** En observant que la fonction f est continue et $\frac{1}{2}$-périodique et que la fonction sinus est positive sur $[\,0,\pi\,]$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, à l'aide de changements de variable d'intégration linéaires :

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1/2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{n+1/2}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{1/2} \sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\Big[\frac{-\cos(2\pi t)}{2\pi}\Big]_0^{1/2} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}}$$

b) Soit $x \in [\,1,+\infty\,[$. D'après la relation de Chasles et (a)

$$\int_1^x |\sin(2\pi t)|\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor -1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor -1} \frac{2}{\pi} + \int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)\,\mathrm{d}t;$$

de plus, la fonction f est positive et $\lfloor x\rfloor \leqslant x$ donc $\int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale ; on conclut que $\int_1^x |\sin(2\pi t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi}(\lfloor x\rfloor - 1)$ comme voulu.

Pour tout réel x on a $\lfloor x\rfloor > x-1$ d'où $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\pi}(\lfloor x\rfloor - 1) = +\infty$; il en découle que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente, donc

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est pas intégrable sur } [\,1,+\infty\,[.}$$

Cependant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f(n) = |\sin(2\pi n)| = 0$, donc

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} f(n) \text{ est convergente.}}$$

La fonction f considérée est continue et positive, mais non décroissante sur $[\,1,+\infty\,[$; on constate que l'implication «si» de l'énoncé **Q7.**(1) est fausse pour cet exemple.

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un réel positif a_n ; la longueur du segment $[\,n-a_n, n+a_n\,]$ (base du $n^{\text{ème}}$ triangle) est égale à $2a_n$ et sa hauteur est égale à 1, donc son aire est égale à $\frac{1}{2}(2a_n)1 = a_n$. On choisira donc nécessairement $\boxed{a_n = \frac{1}{n^2}}$ afin que l'aire du $n^{\text{ème}}$ triangle soit égale à $\frac{1}{n^2}$.

Si $n \geqslant 2$, le segment $[\,n-a_n, n+a_n\,]$ est inclus dans le segment $[\,n-1/3, n+1/3\,]$, et ces segments sont deux à deux disjoints lorsque n décrit l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 2.
En revanche, l'intersection du segment $[\,1-a_1, 1+a_1\,] = [\,0,2\,]$ et du segment $[\,2-a_2, 2+a_2\,] = [\,7/4, 9/4\,]$ est le segment $[\,7/4, 2\,]$: sur cette intersection la définition de la fonction f est ambiguë. Dans la suite, on ne considérera que les triangles définis pour $n \geqslant 2$.
La fonction affine par morceaux f ainsi définie est positive et continue sur $[\,1,+\infty\,[$ (f est continue à gauche et à droite en tout point de recollement n, $n \pm a_n$ pour n entier supérieur ou égal à 2). En tout entier $n \geqslant 2$ on a $f(n) = 1$, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ diverge grossièrement. D'après l'interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment, pour tout réel $x \in [\,1,+\infty\,[$, en prenant $n = \lfloor x\rfloor + 1$ on a $[\,1,x\,] \subset [\,1, n+a_n\,]$ donc

$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2};$$

or la série de Riemann $\sum\limits_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}$ est à termes positifs et convergente, donc ses sommes partielles sont majorées par un réel M ; il en suit que la fonction $x \longmapsto \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée par M, et on conclut que la fonction continue positive f est intégrable sur $[\,1,+\infty\,[$.
La fonction f considérée est continue et positive, mais non décroissante sur $[\,1,+\infty\,[$; on constate que l'implication «seulement si» de l'énoncé **Q7.**(1) est fausse pour cet exemple.