# *Partie I*

I.A.1) Comme il sera établi dans les questions suivantes, $N_\infty$ est la *norme subordonnée* à $\| \ \|_\infty$ ; cependant, il n'est pas bien difficile de montrer directement que c'est une norme ...

I.A.2.a) Pour tout $j$ , $|A(z)_j| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |A_{j,k}||z_k| \leqslant \|z\|_\infty \sum_{k=1}^{n} |A_{j,k}| \leqslant \|z\|_\infty N_\infty(A)$ ...

I.A.2.b) De l'inégalité précédente, il résulte que $\frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} \leqslant N_\infty(A)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ; il reste à exhiber un cas d'égalité. Les candidats ayant déjà étudié cette *norme subordonnée* se souviendront peut-être que si $N_\infty(A) = \sum_{j=1}^{n} |A_{k,j}|$ et si $\theta_j$ est un argument[1] de $A_{k,j}$ pour $j \in \{1, \dots n\}$ , il suffit de prendre $z_j = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta_j}$ ; car alors $\|z\|_\infty = 1$ tandis que, pour tout $i \in \{1, \dots n\}$ ,
$|A(z)_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}||z_j| = \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}| \leqslant N_\infty(A) = |A(z)_k|$ ; donc $\|A(z)\|_\infty = N_\infty(A)$ .

I.A.2.c) Si $z$ est propre pour une valeur propre $\lambda$ de $A$, alors $z$ est non nul et $|\lambda| = \frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}$ ...

I.A.3) Pour tout $z$ , $\|AB(z)\|_\infty \leqslant N_\infty(A)\, \|B(z)\|_\infty \leqslant N_\infty(A)\, N_\infty(B)\, \|z\|_\infty$ ; d'où le résultat, compte tenu de I.A.2.b) ...

I.A.4.a) Il faut d'abord vérifier que $N_Q$ une norme, ce qui n'est pas bien difficile ; puis montrer que $N_Q(AB) \leqslant N_Q(A)\, N_Q(B)$ , ce qui provient de I.A.3) et de $Q^{-1}ABQ = (Q^{-1}AQ)(Q^{-1}BQ)$ .

I.A.4.b) Toujours via I.A.3) on peut prendre $C_Q = N_\infty(Q^{-1})\, N_\infty(Q)$ . (car $A = Q(Q^{-1}AQ)Q^{-1}$ )

I.B) Si l'on note $W = D_S^{-1}\, T\, D_S$ , on a : $W_{i,j} = s^{i+j-2}\, T_{i,j}$ ...
Par conséquent, les coefficients non diagonaux de $W$ tendent vers 0 lorsque $s$ tend vers 0 .
Mais $\rho(T) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |T_{i,i}|$ ; par conséquent, $N_{D_S}(T) = \rho(T)$ pour $s$ assez petit si $\rho(T) \neq 0$ tandis que[2] si $\rho(T) = 0$ alors, quelque soit $\varepsilon > 0$ , pour $s$ assez petit on aura : $N_{D_S}(T) < \varepsilon$ .

Maintenant, si $A$ est une matrice quelconque, prenons $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}\, A\, P$ soit une matrice triangulaire $T$, puis $D_S$ telle que $N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon$ : comme $N_{D_S}(T) = N_{P\,D_S}(A)$ et $\rho(T) = \rho(A)$ , on a le résultat voulu.

I.C) Tout d'abord, $\rho(A)^k = \rho(A^k)$ ; par conséquent, si $A^k$ tend vers la matrice nulle, $\rho(A)^k$ tend vers 0 d'après I.A.2.c) ... il s'ensuit que $\rho(A) < 1$ .
Réciproquement, si $\rho(A) < 1$ , soit $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \varepsilon < 1$ , et $N_\varepsilon$ comme en I.B) : comme $N_\varepsilon(A^k) \leqslant N_\varepsilon(A)^k$ et $N_\varepsilon(A) < 1$ , il s'ensuit que $A^k$ tend vers la matrice nulle.

# *Partie II*

II.A.1)
– $D_1(A)$ est le disque de rayon 4 ayant pour centre le point d'affixe $4 + 3\mathrm{i}$ ;
– $D_2(A)$ est le disque de rayon 1 ayant pour centre le point d'affixe $-1 + \mathrm{i}$ ;
– $D_3(A)$ est le disque de rayon $3 + \sqrt{2}$ ayant pour centre le point d'affixe $5 + 6\mathrm{i}$ ;
– $D_4(A)$ est le disque de rayon 5 ayant pour centre le point d'affixe $-5 - 5\mathrm{i}$ ;
– $D'_1(A)$ est le disque de rayon $2 + \sqrt{2}$ ayant pour centre le point d'affixe $4 + 3\mathrm{i}$ ;
– $D'_2(A)$ est le disque de rayon 4 ayant pour centre le point d'affixe $-1 + \mathrm{i}$ ;
– $D'_3(A)$ est le disque de rayon 4 ayant pour centre le point d'affixe $5 + 6\mathrm{i}$ ;
– $D'_4(A)$ est le disque de rayon 3 ayant pour centre le point d'affixe $-5 - 5\mathrm{i}$ .

[1] On peut prendre n'importe quoi pour argument de 0 afin d'éviter une fastidieuse discussion sur la nullité éventuelle des coefficients de $A$.

[2] Il me semble que cette discussion aurait pu être signalée dans l'énoncé ...

II.A.2.a) Suivant l'indication donnée en II.A.3.a) on considère une solution non nulle de l'équation $M(z) = 0$, soit $p$ tel que $|z_p| = \|z\|_\infty$, on a : $M_{p,p}\, z_p = -\sum_{j\neq p} M_{p,j}\, z_j$ ; d'où l'on obtient le résultat voulu par inégalité triangulaire et division par $|z_p|$, qui est non nul.

II.A.2.b) Ici, l'énoncé dit presque tout : il suffit de remplacer $M$ par $A - \lambda I_n$ ...

II.A.2.c) Le spectre d'une matrice est celui de sa transposée ...

II.A.3.a) Reprenant le raisonnement tenu en II.A.2.a &b) on obtient : $|A_{k,k} - \mu| \leqslant L_k$ ; comme l'inégalité inverse est supposée, l'égalité est prouvée.

II.A.3.b) Avec ce même raisonnement, on constate que s'il existait $j$ tel que $|z_j| < \|z\|_\infty$, alors $|A_{k,k} - \mu| < L_k$, ce qui contredirait le fait que $\mu$ soit sur le bord de $G_L(A)$ ; la question précédente s'applique donc pour tout $j$.

II.A.4) Suivant l'énoncé[3], on notera $D$ pour $D_p$ ... Si l'on pose $B = D^{-1}\, A\, D$, on a : $B_{i,j} = p_i^{-1}\, p_j\, A_{i,j}$ ; par conséquent, $z \in D_i(B) \iff |z - A_{i,i}| \leqslant p_i^{-1} \sum_{j\neq i} p_j |A_{i,j}|$

II.A.5.a) Avec les notations précédentes, si $\lambda$ est valeur propre pour $A$ elle est valeur propre pour $B$ donc, d'après II.A.2) et II.A.4), il existe $i$ tel que $|\lambda - A_{i,i}| \leqslant \frac{1}{p_i} \sum_{j\neq i} p_j |A_{i,j}|$ ; par conséquent, $|\lambda| \leqslant \max_{i=1,2,\ldots n} \frac{1}{p_i} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} p_j |A_{i,j}|$ et ce, quelque soit $p > 0$ ... d'où le résultat.

II.A.5.b.i) Le maximum de trois quantités est minoré par le tiers de leur somme ; or la matrice est symétrique et $\frac{p_i}{p_j} + \frac{p_j}{p_i} \geqslant 2$ pour $i \neq j$ (sachant que $p_j$ et $p_i$ sont stricment positifs) ; par conséquent, ce maximum vaut au moins $\frac{7+7+5+2(16+8+8)}{3} = \frac{83}{3}$.

II.A.5.b.ii) Les valeurs propres sont $(-9)$ (double) et $27$ ...
Nul besoin de calculatrice[4] pour cela puisque le déterminant $\begin{vmatrix} 7-x & -16 & 8 \\ -16 & 7-x & -8 \\ 8 & -8 & -5-x \end{vmatrix}$ se factorise facilement après addition des deux premières colonnes ...

II.B.1.a) D'après II.A.2.b) 0 n'est alors pas valeur propre de $A$, donc $A$ est inversible.

II.B.1.b) D'après II.A.2.b) l'affixe de $\lambda$ appartient à un disque centré en un point d'abscisse strictement négative dont le rayon est strictement plus petit que la valeur absolue de cette abscisse puisque $A$ est SDD *(abrévation autorisée par l'énoncé)* ; le résultat s'ensuit ...

II.B.1.c) D'après Alice au pays des merveilles, on peut remplacer dans la question précédente *négatif* par *positif*... Il s'ensuit que si tous les coefficients diagonaux de $A$ sont strictement positifs (et $A$ réelle symétrique et SDD) alors $A$ est définie positive, puisque ses valeurs propres sont toutes strictement positives. (ce n'est pas la définition de l'énoncé, mais c'est du cours)
Réciproquement, si $A$ est définie positive, alors ses coefficients diagonaux sont strictement positifs puisque ce sont des carrés scalaires de vecteurs non nuls. (c'est aussi dans le cours, quelque part)

II.B.2) B étant diagonalisable, on peut écrire[5] : $B = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $P$ inversible. Pour $E \in M_n(\mathbb{C})$, posons $H = P^{-1} E\, P$ : pour $\hat{\lambda} \in \sigma_{B+E} = \sigma_{D+H}$, d'après II.A.2.b) il existe $i \in [1, n]$ tel que $|\hat{\lambda} - (\lambda_i + H_{i,i})| \leqslant L_i(D+H) = L_i(H)$. D'où : $|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leqslant |H_{i,i}| + L_i(H) = \sum_{j=1}^{n} |Hi,j| \leqslant N_\infty(H)$. Or $N_\infty(H) = N_\infty(P^{-1} E\, P) = N_P(E) \leqslant C_P N_\infty(E)$ d'après I.A.4.b).

[3] Mais n'était-ce pas une coquille ?
[4] Et puis, qu'entend-on par *valeur approchée* ?
[5] Je dois la rédaction de cette question à Bernard Lemaire, professeur au Lycée Jean Bart de Dunkerque.

Comme $\lambda_i \in \sigma_B$ , on a le résultat voulu avec $K_\infty(B) = C_P$ .

## *Partie III*

III.A.1) Toute application continue sur un segment étant bornée, les coefficients de $P_t$ sont bornés indépendamment de $t \in [0,1]$ , d'où $K$ tel que : $\left|\sum_{i=1}^n c_j(t)\,x^{n-j}\right| \leqslant K\sum_{i=1}^n |x|^{n-j}$ $(\forall\, t \in [0,1]\,)$. Cette dernière quantité étant négligeable devant $|x|^n$ quand $x$ tend vers $+\infty$ , il s'ensuit l'existence de $R > 0$ tel que $|x|^n \geqslant 2005\left|\sum_{i=1}^n c_j(t)\,x^{n-j}\right|$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in D(0,R)$ ; par conséquent $Z_t \subset D(0,R)$ pour tout $t \in [0,1]$ .

III.A.2) Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : pour tout $\eta > 0$ , il existe $t$ tel que $|t - t_0| < \eta$ et $|X_t - X_0| \geqslant \alpha$ pour tout $X_t \in Z_t$ . Pour tout $k \geqslant 1$ il existe alors $t_k$ tel que : $|t_k - t_0| < 1/k$ et $|X_t - X_0| \geqslant \alpha$ pour tout $X_t \in Z_{t_k}$ . Posons[6] $Z_{t_k} = \left\{X_{i,t_k}\ ,\ i \in [1,n]\right\}$ (en répétant les racines avec leur multiplicité) de sorte que $|X_{1,t_k} - X_0| \geqslant |X_{2,t_k} - X_0| \geqslant \cdots \geqslant |X_{n,t_k} - X_0| \geqslant \alpha$ . La suite $\left(X_{1,t_k}, X_{2,t_k}, \ldots, X_{n,t_k}\right)$ est une suite de $\mathbb{C}^n$ qui est bornée d'après III.A.1). Par Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente : il existe $\varphi$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(X_{1,t_{\varphi(k)}}, X_{2,t_{\varphi(k)}}, \ldots, X_{n,t_{\varphi(k)}}\right)$ tende vers $(y_1, \ldots, y_n)$ lorsque $k$ tend vers l'infini. D'autre part, on a : $P_{t_{\varphi(k)}}(X) = \prod_{i=1}^n (X - X_{i,t_{\varphi(k)}})$ ; de la continuité des $c_j$ on déduit que, pour tout $X$ fixé dans $\mathbb{C}$ : $P_{t_{\varphi(k)}}(X)$ tend vers $P_{t_0}(X)$ et $\prod_{i=1}^n (X - X_{i,t_{\varphi(k)}})$ tend vers $\prod_{i=1}^n (X - y_i)$ lorsque $k$ tend vers l'infini. Mézalors $P_{t_0}(X) = \prod_{i=1}^n (X - y_i)$ : il existerait donc un $i$ tel que $y_i = X_0$ ... Or ceci est absurde puisqu'en faisant tendre $k$ vers $+\infty$ dans $|X_{i,t_k} - X_0| \geqslant \alpha$ , on obtient $|y_i - X_0| \geqslant \alpha$ .

III.B.1) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ semble convenir ; mais cette question — ainsi que les suivantes — est en contradiction avec le préambule de cette partie ...

III.B.2.a) Puisque $|z - A_{i,i}| = |z - A(t)_{i,i}|$ , il s'ensuit que :
$|z - A(t)_{i,i}| \leqslant \sum_{j\neq i} |A(t)_{i,j}| \Longrightarrow |z - A_{i,i}| \leqslant \sum_{j\neq i} t\,|A_{i,j}| \leqslant \sum_{j\neq i} |A_{i,j}|$ pour $t \in [0,1]$ .

III.B.2.b.i) $A(0) = D$ et $A_{1,1} \in \sigma_D \cap D_1(A)$ donc $0 \in E$ .

III.B.2.b.ii) Si $t \in E$ soit $\lambda_t \in \sigma_{A(t)} \cap D_1(A)$ : par hypothèse, $\lambda_t \notin D_i$ pour $i > 2$ ; soit $\alpha$ la distance minimale de $\lambda_t$ à ces disques. En prenant pour $P_t(X)$ le polynôme caractéristique de $A(t)$ , et en appliquant la proposition $(P)$ de II.A.2) avec $\varepsilon = \alpha/2$ , on obtient $\eta$ tel que pour tout $u \in ]t-\eta, t+\eta[ \cap [0,1]$ il existe $\lambda_u \in \sigma_{A(u)}$ tel que $\lambda_u \notin D_i(A)$ pour $i > 2$ ; mézalors $\lambda_u \in D_1(A)$ d'après II.A.1.b) et III.B.2.a) ...

III.B.2.b.iii) Pour tout $k \geqslant 1$ , il existe $\lambda_{t_k} \in \sigma_{A(t_k)} \cap D_1(A)$ . Comme $D_1(A)$ est compact[7], il existe une suite extraite $\lambda_{t_{\varphi(k)}}$ qui converge vers un élément $\mu$ de $D_1(A)$ . Mais $P_{t_{\varphi(k)}}(\lambda_{t_{\varphi(k)}}) = 0$ ; d'où $P_a(\mu) = 0$ en faisant tendre $k$ tend vers l'infini ; ainsi $\mu \in \sigma_{A(a)} \cap D_1(A)$ donc $a \in E$ .

III.B.2.b.iv) $E$ est i) non vide , ii) ouvert , iii) fermé , donc $E = [0,1]$ d'après la propriété admise, qui est la définition hors programme de la connexité[8] ; par conséquent, $\sigma_A \cap D_1(A) \neq \emptyset$ .

III.B.3) D'après le dessin exécuté par ma fille — actuellement élève en 5ème — $D_2$ et $D_4$ ont la propriété de ne rencontrer aucun des trois autres disques, il existe donc au moins une valeur propre dans chacun de ces deux disques.

---

[6] Je dois la rédaction de cette question à Bernard Lemaire, professeur au Lycée Jean Bart de Dunkerque.

[7] Argument de compacité communiqué par Bernard Lemaire, professeur au Lycée Jean Bart de Dunkerque.

[8] Que l'on aurait pu éviter, tout comme la notion d'ouverts et de fermés **relatifs** : voir l'appendice ...

# *Partie IV*

IV.A.1) Comme il est rappelé dans l'énoncé, $N_2$ est une norme associée à un produit hermitien[9] ...
Reste à vérifier $N_2(AB) \leqslant N_2(A)N_2(B)$, i.e $\sum_{i,j} |\sum_{1\leqslant k\leqslant n} A_{i,k}B_{k,j}|^2 \leqslant \big(\sum_{i,j} |A_{i,j}|^2\big)\big(\sum_{i,j} |B_{i,j}|^2\big)$ .
Or Cauchy-Shwarz dans $\mathbb{C}^n$ donne $|\sum_{1\leqslant k\leqslant n} A_{i,k}B_{k,j}|^2 \leqslant \big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} |A_{i,k}|^2\big)\big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} |B_{k,j}|^2\big)$ et, pour finir : $\sum_{i,j}\big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} |A_{i,k}|^2\big)\big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} |B_{k,j}|^2\big) = \big(\sum_{i,j} |A_{i,j}|^2\big)\big(\sum_{i,j} |B_{i,j}|^2\big)$ .

Pour simplifier les notations, on notera dans la suite $A \otimes B$ au lieu de $A \times_H B$ ...

IV.A.2.a) $\big(D(A\otimes B)\Delta\big)_{i,j} = D_i A_{i,j} B_{i,j} \Delta_j = \big((DA\Delta)\otimes B\big)_{i,j} = \big((DA)\otimes(B\Delta)\big)_{i,j}$
L'autre question semble avoir été mal copiée/collée ...

IV.A.2.b) $(AD_x\,{}^tB)_{i,i} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n}(AD_x)_{i,k}\,({}^tB)_{k,i} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} A_{i,k}\,x_k\,B_{i,k} = \big((A\otimes B)\,x\big)_i$

IV.A.2.c) $y^*(A\otimes B)\,x = e^* D_y^*(A\otimes B)\,D_x\,e =_{IV.A.2.a} e^*\big((D_y^* A\,D_x)\otimes B\big)\,e$
donc $y^*(A\otimes B)\,x = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(\big((D_y^* A\,D_x)\otimes B\big)\,e\Big)_i =_{IV.A.2.b)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n}(D_y^* A\,D_x\,{}^tB)_{i,i}$ .

IV.A.2.d) Remplacer $y$ par $x$ dans ce qui précède, et revenir à la définition du produit scalaire.

IV.B.1) Puisque $S$ est symétrique réelle positive, il existe une matrice orthogonale $P$ telle que $S = {}^tP\,D\,P$ avec $D$ diagonale à coefficients positifs ; il suffit alors de considérer la matrice $R$ dont les coefficients sont les racines carrées de ceux de $D$ : $M = RP$ convient ...
Si $S$ est définie positive, $M$ est inversible.

IV.B.2) Il est clair que si $A$ et $B$ sont symétriques alors $A\otimes B$ est symétrique. Il reste à montrer que si $A$ et $B$ sont positives, alors ${}^tx\,(A\otimes B)\,x \geqslant 0$ pour tout vecteur $x$. Grâce à la question précédente, on peut poser $A = {}^tT\,T$ et $B = {}^tU\,U$ ... Par IV.A.2.c) on a :
${}^tx\,(A\otimes B)\,x = \mathrm{tr}(D_x\,A\,D_x\,{}^tB) = \mathrm{tr}(D_x\,{}^tT\,T\,D_x\,{}^tU\,U) = \mathrm{tr}(U\,D_x\,{}^tT\,T\,D_x\,{}^tU) = \langle U\,D_x\,{}^tT,\,U\,D_x\,{}^tT\,\rangle$ ;
cette dernière quantité est postive, et strictement si $A$ et $B$ sont définies positives et $x$ non nul.
Dans ce dernier cas, $A\otimes B$ est donc définie positive.

IV.B.3.a) Soit $P$ orthogonale telle que ${}^tP\,B\,P$ soit diagonale : ${}^tP\,(B-\lambda_{\min}(B)\,I_n)\,P$ est alors diagonale à cofficients positifs, ce qui montre que $B-\lambda_{\min}(B)\,I_n$ est positive.
Le deuxième point est immédiat par IV.B.2) .

IV.B.3.b) Pour alléger les notations, on notera simplement $\lambda$ la valeur propre considérée ...
On part de $A\otimes(B-\lambda_{\min}(B)\,I_n) = A\otimes B - \lambda_{\min}(B)\,A\otimes I_n$ qui donne :
$0 = {}^tx\,(A\otimes B-\lambda I_n)\,x = {}^tx\,\big(A\otimes(B-\lambda_{\min}(B)\,I_n)\big)\,x + \lambda_{\min}(B)\,{}^tx\,(A\otimes I_n)\,x - \lambda$ ;
comme $A\otimes(B-\lambda_{\min}(B)\,I_n)$ est positive, on en déduit : $\lambda \geqslant \lambda_{\min}(B)\,{}^tx\,(A\otimes I_n)\,x$ .
Pour finir, ${}^tx\,(A\otimes I_n)\,x = \sum_i A_{i,i}\,x_i^2 \geqslant \min_i A_{i,i}\,\sum_i x_i^2 = \min_i A_{i,i}$ .

IV.B.3.c) $A_{i,i}-\lambda_{\min}(A) = {}^te_i\,\big(A-\lambda_{\min}(A)\,I_n\big)\,e_i$ où $e_i$ est le i-ème vecteur de la base canonique, et cette dernière quantité est positive puisque $A-\lambda_{\min}(A)\,I_n$ est positive d'après IV.B.3.a) .

IV.B.3.c) On repart avec $0 = {}^tx\,\big(A\otimes(B-\lambda_{\max}(B)\,I_n)\big)\,x + \lambda_{\max}(B)\,{}^tx\,(A\otimes I_n)\,x - \lambda$ :
$A\otimes(B-\lambda_{\max}(B)\,I_n)$ est négative donc $\lambda \leqslant \lambda_{\max}(B)\,{}^tx\,(A\otimes I_n)\,x$ ; et pour finir,
${}^tx\,(A\otimes I_n)\,x = \sum_i A_{i,i}\,x_i^2 \leqslant \max_i A_{i,i}\,\sum_i x_i^2 = \max_i A_{i,i} \leqslant \lambda_{\max}(A)$ .

---

[9]**Quoique ce ne soit pas celui du programme !** Il était d'ailleurs inutile — et probablement déstabilisant pour bon nombre de candidats — de se placer ici dans le champ complexe, puisqu'on reste dans le champ réel par la suite. C'est dommage, car cette partie était bien plus abordable que la précédente.

## *APPENDICE*

Revenons à la question III.B.2) :
$E$ est non vide d'après i) et majoré (par 1) donc admet une borne supérieure $b$.
Par iii) on voit que $b \in E$ ... Puis $b = 1$ par ii) ...

Cette question et quelques autres montrent que ce sujet — au demeurant intéressant — n'a pas été suffisamment cobayé pour être rendu accessible à une partie significative du public concerné.

Sur les mêmes thèmes voir :
– ENSAIT 2002, deuième épreuve PC ;
– ESIEE Amiens 1995 ;
– TPE 1984, épreuve pratique ;
– ENS Fontenay-Saint-Cloud 1980, première épreuve option Maths.