

Un corrigé de l'épreuve de mathématiques A 2021 de la banque PT

par Mikael FALCONNET

Probabilités

1. (a) 1er cas. On suppose $0 < p_1 < 1$. Alors la famille $(\{X_1 = 1\}, \{X_1 = 0\})$ est un système quasi complet d'évènements et la formule des probabilités totales entraîne :

$$\begin{aligned} p_2 &= \mathbb{P}(X_2 = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) \\ &= [1 - \mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = 1)] p_1 + \beta(1 - p_1) \\ &= (1 - \alpha)p_1 + \beta(1 - p_1) \\ &= \beta + (1 - \alpha - \beta)p_1. \end{aligned}$$

2e cas. On suppose $p_1 = 1$. Alors la famille $(\{X_1 = 1\})$ est un système quasi complet d'évènements et la formule des probabilités totales entraîne :

$$p_2 = \mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \alpha = \beta + (1 - \alpha - \beta)p_1.$$

3e cas. On suppose $p_1 = 0$. Alors la famille $(\{X_1 = 0\})$ est un système quasi complet d'évènements et la formule des probabilités totales entraîne :

$$p_2 = \mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) = \beta = \beta + (1 - \alpha - \beta)p_1.$$

Conclusion. Dans tous les cas, on obtient $p_2 = \beta + (1 - \alpha - \beta)p_1$.

- (b) En remplaçant X_1 par X_n , X_2 par X_{n+1} , p_1 par p_n et p_2 par p_{n+1} , le raisonnement précédent nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \beta + (1 - \alpha - \beta)p_n.$$

- (c) Posons $q = 1 - \alpha - \beta$. Alors la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ vérifie $p_{n+1} = qp_n + \beta$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, donc est arithmético-géométrique. Déterminons, s'il existe, l'unique réel ℓ tel que la suite $(p_n - \ell)_{n \geq 1}$ soit géométrique de raison q . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il vient :

$$p_{n+1} - \ell = q(p_n - \ell) \iff qp_n + \beta - \ell = qp_n - q\ell \iff (1 - q)\ell = \beta \stackrel{1-q=\alpha+\beta>0}{\iff} \ell = \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$

Ainsi, en posant $\ell = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$, la suite $(p_n - \ell)_{n \geq 1}$ est géométrique de raison q . On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n - \ell = q^{n-1}(p_1 - \ell),$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \frac{\beta}{\alpha + \beta} + q^{n-1} \left(p_1 - \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right), \quad \text{où } q = 1 - \alpha - \beta.$$

- (d) Puisque l'on a $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta \leq 1$, il vient $0 < \alpha + \beta < 2$ puis $-1 < \alpha + \beta - 1 < 1$ et donc $-1 < q < 1$. En conséquence $q^{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ puis

$$p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$

2. (a) D'après la question 1.(c), il vient $p_2 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$ puis $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)$.

(b) En utilisant la formule $\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \mathbb{P}(X_2 = j | X_1 = i) \mathbb{P}(X_1 = i)$, $\forall (i, j) \in \{0, 1\}^2$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) &= \frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha + \beta}, & \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) &= \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}, \\ \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) &= \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}, & \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) &= \frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha + \beta}. \end{aligned}$$

(c) Puisque X_1 et X_2 suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$, X_1 et X_2 admettent une espérance et une variance données par

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha + \beta}\right) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2}.$$

(d) Puisque X_1 et X_2 sont de carrés intégrables, la covariance entre X_1 et X_2 est définie et donnée par $\text{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(X_2)$. Puisque $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$ sont connues, il nous reste à déterminer $\mathbb{E}(X_1 X_2)$.

Comme X_1 et X_2 sont à valeurs dans $\{0, 1\}$, $X_1 X_2$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$ donc suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X_1 X_2 = 1)$. En conséquence,

$$\mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{P}(X_1 X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{(1 - \alpha)\beta}{\alpha + \beta},$$

puis

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_2) &= \frac{(1 - \alpha)\beta}{\alpha + \beta} - \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)^2 \\ &= \frac{\beta}{\alpha + \beta} \left(1 - \alpha - \frac{\beta}{\alpha + \beta}\right) \\ &= \frac{\beta}{(\alpha + \beta)^2} [(1 - \alpha)(\alpha + \beta) - \beta] \\ &= \frac{\beta}{(\alpha + \beta)^2} (\alpha - \alpha\beta - \alpha^2) \\ &= \frac{\alpha\beta q}{(\alpha + \beta)^2}. \end{aligned}$$

On obtient

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{\alpha\beta q}{(\alpha + \beta)^2}, \quad \text{où } q = 1 - \alpha - \beta.$$

(e) Si $q \neq 0$, du fait que $\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} > 0$, il vient $\text{Cov}(X_1, X_2) \neq 0$ et on est certain que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Au contraire, si $q = 0$, il vient $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$ et X_2 est potentiellement indépendante de X_1 . Vérifions que c'est bien le cas. Puisque $q = 0$, il vient $\alpha + \beta = 1$, $p_1 = p_2 = \beta$ et $1 - p_1 = 1 - p_2 = \alpha$, et en conséquence la loi du couple (X_1, X_2) est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) &= \alpha^2 = (1 - p_1)(1 - p_2), & \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) &= \alpha\beta = (1 - p_1)p_2 \\ \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) &= \alpha\beta = p_1(1 - p_2), & \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) &= (1 - \alpha)\beta = p_1 p_2. \end{aligned}$$

La loi jointe de (X_1, X_2) est donc le produit des lois marginales de X_1 et de X_2 , donc X_1 et X_2 sont indépendantes. Finalement

$$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \iff \alpha + \beta = 1.$$

3. Déterminons la loi de N . Par définition, $N = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : X_n = 0\}$ donc N est à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Puisque l'appareil est en fonctionnement le premier jour, X_1 vaut 1 presque sûrement et $\mathbb{P}(N = 1) = 0$. Maintenant, pour tout $n \geq 2$, il vient par la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = n) &= \mathbb{P}(X_1 = 1, \dots, X_{n-1} = 1, X_n = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1) \cdots \mathbb{P}(X_{n-1} = 1 | X_1 = 1, \dots, X_{n-2} = 1) \cdot \mathbb{P}(X_n = 0 | X_1 = 1, \dots, X_{n-1} = 1). \end{aligned}$$

Puisque le comportement de l'appareil au jour j ne dépend que de son état au jour $j - 1$ et pas des jours précédents, nous avons

$$\forall j \in [2, n - 1], \quad \mathbb{P}(X_j = 1 | X_1 = 1, \dots, X_{j-1} = 1) = \mathbb{P}(X_j = 1 | X_{j-1} = 1) = 1 - \alpha$$

et

$$\mathbb{P}(X_n = 0 | X_1 = 1, \dots, X_{n-1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 0 | X_{n-1} = 1) = \alpha.$$

En conséquence,

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbb{P}(N = n) = (1 - \alpha)^{n-2} \alpha.$$

Enfin, puisque $\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) = 1$, il vient $\mathbb{P}(N = +\infty) = 0$, et la loi de N est déterminée. On peut alors donner la loi de $N - 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(N - 1 = n) = \mathbb{P}(N = n + 1) = (1 - \alpha)^{n-1} \alpha,$$

ce qui prouve que $N - 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)$.

4. (a) Fixons $t \in [0, 1]$. Alors $0 \leq (1 - p)t \leq 1 - p < 1$ puis :

$$G_{Y_1}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_1 = n) t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1 - p)^{n-1} t^n = p t \sum_{n=1}^{+\infty} [(1 - p)t]^{n-1} = \frac{p t}{1 - (1 - p)t}.$$

Ainsi, $\forall t \in [0, 1], G_{Y_1}(t) = \frac{p t}{1 - (1 - p)t}$.

- (b) Puisque Y_1 et Y_2 sont indépendantes et suivent la même loi, il vient

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_{Y_1+Y_2}(t) = G_{Y_1}(t) \cdot G_{Y_2}(t) = [G_{Y_1}(t)]^2 = \left(\frac{p t}{1 - (1 - p)t} \right)^2.$$

- (c) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Il vient :

$$\mathbb{P}(Z \geq n) = \mathbb{P}(Y_1 \geq n, Y_2 \geq n) \stackrel{Y_1 \perp Y_2}{=} \mathbb{P}(Y_1 \geq n) \cdot \mathbb{P}(Y_2 \geq n) \stackrel{Y_1 \sim Y_2}{=} [\mathbb{P}(Y_1 \geq n)]^2.$$

Or, nous avons

$$\mathbb{P}(Y_1 \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_1 = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} p(1 - p)^{k-1} \stackrel{j=k-n}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} p(1 - p)^{j+n-1} = p(1 - p)^{n-1} \sum_{j=0}^{+\infty} (1 - p)^j = (1 - p)^{n-1},$$

et en conséquence $\mathbb{P}(Z \geq n) = r^{n-1}$, où $r = (1 - p)^2$. Maintenant,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \geq k) - \mathbb{P}(Z \geq k + 1) = r^{k-1} - r^k = r^{k-1}(1 - r),$$

et on en déduit $Z \hookrightarrow \mathcal{G}[1 - (1 - p)^2]$.

(d) De manière analogue, on établit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(T \leq n) = [\mathbb{P}(Y_1 \leq n)]^2 = [1 - \mathbb{P}(Y_1 \geq n+1)]^2 = [1 - (1-p)^n]^2.$$

La formule précédente étant également valable en $n = 0$, il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = n) &= \mathbb{P}(T \leq n) - \mathbb{P}(T \leq n-1) \\ &= [1 - (1-p)^n]^2 - [1 - (1-p)^{n-1}]^2 \\ &= [(1-p)^{n-1} - (1-p)^n] \cdot [2 - (1-p)^{n-1} - (1-p)^n] \\ &= p(1-p)^{n-1} [2 - (1-p)^{n-1} - (1-p)^n]. \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(T = n) = p(1-p)^{n-1} [2 - (1-p)^{n-1} - (1-p)^n]}$.

5. Notons N_1 (respectivement N_2) le numéro du jour où le premier appareil (respectivement le second) tombe en panne pour la première fois. La première panne se produit alors au jour $N = \min(N_1, N_2)$. Maintenant, posons $Y_1 = N_1 - 1$, $Y_2 = N_2 - 1$ et $Z = \min(Y_1, Y_2) = N - 1$. Puisque les deux appareils sont en fonctionnement le premier jour, la question 3 nous dit que Y_1 et Y_2 suivent la même loi géométrique de paramètre α . Puisque les comportements des appareils sont indépendants l'un de l'autre, Y_1 et Y_2 sont indépendantes et Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - (1-p)^2$. Il vient alors

$$\boxed{\mathbb{E}(N) = 1 + \mathbb{E}(Z) = 1 + \frac{1}{1 - (1-p)^2} = \frac{2 - (1-p)^2}{1 - (1-p)^2}}.$$

Algèbre linéaire

Partie I

1. (a) Puisque B est symétrique réelle, elle possède une base orthonormée de vecteurs propres (E_1, E_2, E_3) . Notons \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 et considérons les vecteurs e_1, e_2 et e_3 de \mathbb{R}^3 vérifiant $E_k = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_k), \forall k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$. Alors la famille $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de vecteurs propres pour g et $\boxed{\text{la matrice de } g \text{ dans } \mathcal{B}' \text{ est diagonale}}$.
- (b) Déterminons le spectre de g . Pour ce faire calculons $\chi_g = \chi_B$. En effectuant l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$, en factorisant par $2 - t$, en effectuant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ puis en développant par rapport à C_1 , il vient :

$$\chi_B(t) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1-t & -3 & -1 \\ -3 & 3-t & -3 \\ -1 & -3 & 1-t \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2-t & -3 & -1 \\ 0 & 3-t & -3 \\ t-2 & -3 & 1-t \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3-t & -3 \\ -1 & -3 & 1-t \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3-t & -3 \\ 0 & -6 & -t \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} 3-t & -3 \\ -6 & -t \end{vmatrix}.$$

Comme $\begin{vmatrix} 3-t & -3 \\ -6 & -t \end{vmatrix} = t(t-3) - 18 = t^2 - 3t - 18 = (t+3)(t-6)$, on obtient finalement

$$\boxed{\text{Sp}(g) = \{-3; 2; 6\}}.$$

Déterminons maintenant les sous-espaces propres de g . Puisque χ_g est scindé à racines simples, ils sont tous de dimension 1.

— Les colonnes de $B + 3I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ vérifient $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ donc

$$\boxed{E_{-3}(g) = \text{Vect}(e_1) \text{ où } e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)}$$

— Les colonnes de $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ vérifient $C_1 - C_3 = 0$ donc

$$\boxed{E_2(g) = \text{Vect}(e_2) \text{ où } e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)}$$

— Les sous-espaces propres de g étant orthogonaux, il vient

$$E_6(g) = \text{Vect}(e_3) \text{ où } e_3 = e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1).$$

(c) Puisque (e_1, e_2, e_3) est orthonormée, il vient

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2, \quad \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

En conséquence, si $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ et $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$, il vient

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i.$$

Immédiatement, on obtient $\langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Maintenant, puisque

$$g(x) = x_1 g(e_1) + x_2 g(e_2) + x_3 g(e_3) = -3x_1 e_1 + 2x_2 e_2 + 6x_3 e_3$$

il vient $\langle g(x), x \rangle = -3x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2$. Enfin, on établit par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g^n(e_1) = (-3)^n e_1, \quad g^n(e_2) = 2^n e_2, \quad g^n(e_3) = 6^n e_3,$$

et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g^n(x) = x_1 g^n(e_1) + x_2 g^n(e_2) + x_3 g^n(e_3) = (-3)^n x_1 e_1 + 2^n x_2 e_2 + 6^n x_3 e_3,$$

puis $\langle g^n(x), x \rangle = (-3)^n x_1^2 + 2^n x_2^2 + 6^n x_3^2$.

(d) Puisque $2^n = o[(-3)^n]$, $(-3)^n = o(6^n)$ et $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ il vient

$$v_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} 6^n x_3^2 & \text{si } x_3 \neq 0, \\ (-3)^n x_1^2 & \text{si } x_3 = 0 \text{ et } x_1 \neq 0, \\ 2^n x_2^2 & \text{si } x_3 = x_1 = 0 \text{ et } x_2 \neq 0, \end{cases}$$

Dans tous les cas, il vient $|v_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et

la suite $(v_n(x))_{n \geq 1}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

(e) On vient de voir que si $x_3 \neq 0$, il vient $v_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 6^n x_3^2$. En conséquence

$$\frac{v_n(x)}{v_{n-1}(x)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{6^n x_3^2}{6^{n-1} x_3^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 6,$$

ce qui entraîne $\frac{v_n(x)}{v_{n-1}(x)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 6$.

2. (a) Puisque l'on a

$$C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

il vient $h(e_1) = -3e_1$, $h(e_2) = 3e_2$ et $h(e_3) = 3e_3$. Ceci prouve que (e_1, e_2, e_3) est une base de vecteurs propres de h , et donc que h est diagonalisable dans (e_1, e_2, e_3) .

- (b) Puisque $h^n(e_1) = (-3)^n e_1$, $h^n(e_2) = 3^n e_2$ et $h^n(e_3) = 3^n e_3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, il vient $w_n(e_1) = (-3)^n$, $w_n(e_2) = 3^n$ et $w_n(e_3) = 3^n$ puis

$$\boxed{\frac{w_n(e_1)}{w_{n-1}(e_1)} = -3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -3, \quad \frac{w_n(e_2)}{w_{n-1}(e_2)} = 3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3 \quad \text{et} \quad \frac{w_n(e_3)}{w_{n-1}(e_3)} = 3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3.}$$

- (c) Soit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{R}^3$. Si x est nul, $w_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, donc le vecteur nul n'est pas dans D . On suppose x non nul dans la suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il vient

$$h^n(x) = x_1 h^n(e_1) + x_2 h^n(e_2) + x_3 h^n(e_3) = (-3)^n x_1 e_1 + 3^n x_2 e_2 + 3^n x_3 e_3,$$

puis

$$w_n(x) = (-3)^n x_1^2 + 3^n (x_2^2 + x_3^2) = 3^n [x_2^2 + x_3^2 + (-1)^n x_1^2].$$

En particulier, $w_{2n}(x) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Maintenant

- si $x_2^2 + x_3^2 - x_1^2 \neq 0$, $w_{2n+1}(x) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- si $x_2^2 + x_3^2 - x_1^2 = 0$, $w_{2n+1}(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Finalement, $D = \{x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 : x_2^2 + x_3^2 - x_1^2 \neq 0\}$.

- (d) Posons $x_0 = e_1 + e_2 + 2e_3$. Comme $1^2 + 2^2 - 1^2 = 4 \neq 0$, x_0 est bien un élément de D . Maintenant,

$$\frac{w_{2n}(x_0)}{w_{2n-1}(x_0)} = \frac{6 \cdot 3^{2n}}{4 \cdot 3^{2n-1}} = \frac{9}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{2} \quad \text{et} \quad \frac{w_{2n+1}(x_0)}{w_{2n}(x_0)} = \frac{4 \cdot 3^{2n+1}}{6 \cdot 3^{2n}} = 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2,$$

ce qui prouve que la suite $\left(\frac{w_n(x_0)}{w_{n-1}(x_0)}\right)_{n \geq 1}$ ne converge pas puisqu'elle possède deux sous-suites dont le comportement asymptotique diffère.

- (e) Soit $x \in D$. Puisque $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, il vient

$$\boxed{\frac{w_n(x)}{w_{n-2}(x)} = \frac{3^n [x_2^2 + x_3^2 + (-1)^n x_1^2]}{3^{n-2} [x_2^2 + x_3^2 + (-1)^{n-2} x_1^2]} = 3^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3^2.}$$

Partie II

1. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\langle x, e_d \rangle \neq 0$. Notons (x_1, \dots, x_d) les coordonnées de x dans la base (e_1, \dots, e_d) . Puisque (e_1, \dots, e_d) est orthonormée, il vient $x_i = \langle x, e_i \rangle$, $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, et en conséquence $x_d \neq 0$. Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f^n(x) = \sum_{i=1}^d x_i f^n(e_i) = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n x_i e_i,$$

puis, en utilisant à nouveau que (e_1, \dots, e_d) est orthonormée,

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \langle f^n(x), x \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^d \lambda_i^n x_i e_i, \sum_{j=1}^d x_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \lambda_i^n x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^d \lambda_i^n x_i^2 \\ &= \lambda_d^n x_d^2 \left[1 + \sum_{i=1}^{d-1} \frac{x_i^2}{x_d^2} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_d} \right)^n \right] \end{aligned}$$

Comme $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_d} \right| = \frac{|\lambda_i|}{|\lambda_d|} \leq \frac{|\lambda_{d-1}|}{|\lambda_d|} < 1$, $\forall i \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket$, il vient $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_d} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ puis $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_d^n x_d^2$. En conséquence

$$\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda_d^n x_d^2}{\lambda_d^{n-1} x_d^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_d \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda_d.$$

2. En reprenant les notations et les calculs de la question précédente, il vient

$$u_n(x) = \alpha(x) \lambda_d^n \left[1 + \sum_{i=1}^k \frac{x_i^2}{\alpha(x)} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_d} \right)^n \right], \quad \text{où } \alpha(x) = \sum_{i=k+1}^d x_i^2 \geq x_d^2 > 0,$$

puis $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha(x) \lambda_d^n$ et enfin

$$\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda_d^n \alpha(x)}{\lambda_d^{n-1} \alpha(x)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_d \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda_d.$$

3. Posons $x = e_{d-1} + 2e_d$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = (-\lambda_d)^n + 4(\lambda_d)^n$ puis

$$\frac{u_{2n}(x)}{u_{2n-1}(x)} = \frac{5 \cdot \lambda_d^{2n}}{3 \cdot \lambda_d^{2n-1}} = \frac{5}{3} \lambda_d \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{3} \lambda_d \quad \text{et} \quad \frac{u_{2n+1}(x)}{u_{2n}(x)} = \frac{3 \cdot \lambda_d^{2n+1}}{5 \cdot \lambda_d^{2n}} = \frac{3}{5} \lambda_d \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{5} \lambda_d.$$

Puisque $\lambda_d \neq 0$, il vient $\frac{5}{3} \lambda_d \neq \frac{3}{5} \lambda_d$ et la suite $\left(\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \right)_{n \geq 1}$ possède deux sous-suites dont le comportement asymptotique diffère. En conséquence,

la suite $\left(\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \right)_{n \geq 1}$ ne converge pas.

Partie III

1. Fixons $x \in F_k^*$. Il existe alors $(x_k, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-k+1}$ non nul vérifiant $x = \sum_{i=k}^d x_i e_i$, et il vient

$$\begin{aligned} \langle f(x), x \rangle &= \sum_{i=k}^d \lambda_i x_i^2 \\ &\geq \sum_{i=k}^d \lambda_k x_i^2 \quad (\text{car } \forall i \in \llbracket k, d \rrbracket, x_i^2 \geq 0 \text{ et } \lambda_i \geq \lambda_k) \\ &= \lambda_k \langle x, x \rangle. \end{aligned}$$

Comme $\langle x, x \rangle > 0$, on obtient bien $\frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \lambda_k, \forall x \in F_k^*$.

2. Remarquons que e_k est un élément de F_k^* qui vérifie $\frac{\langle f(e_k), e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} = \lambda_k$. En conséquence

$$\forall x \in F_k^*, \quad \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \frac{\langle f(e_k), e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle},$$

puis

$$\min_{x \in F_k^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\langle f(e_k), e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} = \lambda_k.$$

3. Fixons $x \in E_k^*$. Il existe alors $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ non nul vérifiant $x = \sum_{i=1}^k x_i e_i$, et il vient

$$\begin{aligned} \langle f(x), x \rangle &= \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^k \lambda_k x_i^2 \quad (\text{car } \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, x_i^2 \geq 0 \text{ et } \lambda_i \leq \lambda_k) \\ &= \lambda_k \langle x, x \rangle. \end{aligned}$$

Comme $\langle x, x \rangle > 0$, on obtient $\frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \lambda_k, \forall x \in E_k^*$. Maintenant, remarquons que e_k est un élément de E_k^* qui vérifie $\frac{\langle f(e_k), e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} = \lambda_k$. En conséquence

$$\forall x \in E_k^*, \quad \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \frac{\langle f(e_k), e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle},$$

puis

$$\max_{x \in E_k^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\langle f(e_k), e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} = \lambda_k.$$

4. (a) Soit $V \in \mathcal{V}_k$. Supposons par l'absurde que l'on a $V \cap F_k = \{0\}$. Alors V et F_k sont en somme directe et il vient $\dim(V + F_k) = \dim V + \dim F_k = k + (d - k + 1) = d + 1$. Or nous avons $V + F_k \subset \mathbb{R}^d$ donc $\dim(V + F_k) \leq \dim \mathbb{R}^d = d$, ce qui est contradictoire. En conséquence, $V \cap F_k \neq \{0\}$.

(b) Montrons dans un premier temps que $\sup_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \lambda_k$. Notons $\Gamma = \left\{ \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} : x \in V^* \right\}$.

— Puisque $V \cap F_k \neq \{0\}$, V^* est non vide donc Γ est une partie non vide de \mathbb{R} .

— Puisque $V^* \subset \mathbb{R}^d = E_d$, pour tout $x \in V^*$, il vient $\frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \max_{x \in E_d^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \lambda_d$, ce qui prouve que Γ est majorée par λ_d .

En conséquence, Γ admet une borne supérieure et la quantité $\sup_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \sup \Gamma$ est bien définie. Par ailleurs, puisque V^* contient un vecteur y de F_k^* , il vient

$$\sup_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \frac{\langle f(y), y \rangle}{\langle y, y \rangle} \geq \min_{x \in F_k^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \lambda_k.$$

Pour achever la question, il faudrait établir l'existence de $\max \Gamma$, c'est-à-dire à montrer qu'il existe un vecteur $\tilde{x} \in V^*$ vérifiant $\sup \Gamma = \frac{\langle f(\tilde{x}), \tilde{x} \rangle}{\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle}$. Je pense que l'énoncé sous-entendait implicitement l'existence de \tilde{x} car elle est délicate à établir avec les outils du programme de PT. Nous en rédigeons toutefois une preuve en annexe 1.

(c) Puisque E_k est de dimension k , E_k est un élément de \mathcal{V}_k qui vérifie, d'après la question 3, $\max_{x \in E_k^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \lambda_k$. En conséquence,

$$\forall V \in \mathcal{V}_k, \quad \max_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \lambda_k = \max_{x \in E_k^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle},$$

et donc

$$\min_{V \in \mathcal{V}_k} \left(\max_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \right) = \lambda_k.$$

(d) En s’inspirant des questions 4.(a) à 4.(c), Montrons successivement que

(i) $\forall V \in \mathcal{V}_{d-k+1}, V \cap E_k \neq \{0\};$

(ii) $\forall V \in \mathcal{V}_{d-k+1}, \min_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \lambda_k;$

(iii) $\max_{V \in \mathcal{V}_{d-k+1}} \left(\min_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \right) = \lambda_k.$

(i). Soit $V \in \mathcal{V}_{d-k+1}$. Supposons par l’absurde que l’on a $V \cap E_k = \{0\}$. Alors V et E_k sont en somme directe et il vient $\dim(V + E_k) = \dim V + \dim E_k = d - k + 1 + k = d + 1$. Or nous avons $V + E_k \subset \mathbb{R}^d$ donc $\dim(V + E_k) \leq \dim \mathbb{R}^d = d$, ce qui est contradictoire. En conséquence, $V \cap E_k \neq \{0\}$.

(ii). Montrons dans un premier temps que $\inf_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \lambda_k$. Notons $\Gamma = \left\{ \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} : x \in V^* \right\}$.

— Puisque $V \cap E_k \neq \{0\}$, V^* est non vide donc Γ est une partie non vide de \mathbb{R} .

— Soit $x \in V^*$. Il existe alors $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ non nul vérifiant $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$, et il vient

$$\begin{aligned} \langle f(x), x \rangle &= \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^d \lambda_1 x_i^2 \quad (\text{car } \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, x_i^2 \geq 0 \text{ et } \lambda_i \geq \lambda_1) \\ &= \lambda_1 \langle x, x \rangle. \end{aligned}$$

Comme $\langle x, x \rangle > 0$, on obtient $\frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \lambda_1, \forall x \in V^*$, ce qui prouve que Γ est minorée par λ_1 .

En conséquence, Γ admet une borne inférieure et la quantité $\inf_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \inf \Gamma$ est bien définie. Par ailleurs, puisque V^* contient un vecteur y de E_k^* , il vient

$$\inf_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \frac{\langle f(y), y \rangle}{\langle y, y \rangle} \leq \max_{x \in E_k^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \lambda_k.$$

Maintenant, la stratégie détaillée dans l’annexe 1 permet d’établir qu’il existe un vecteur $\tilde{x} \in V^*$ vérifiant $\inf \Gamma = \frac{\langle f(\tilde{x}), \tilde{x} \rangle}{\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle}$, et on obtient bien

$$\min_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \lambda_k.$$

(iii). Puisque F_k est de dimension $d - k + 1$, F_k est un élément de \mathcal{V}_{d-k+1} qui vérifie, d’après la question 2, $\min_{x \in F_k^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \lambda_k$. En conséquence,

$$\forall V \in \mathcal{V}_k, \min_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \lambda_k = \min_{x \in F_k^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle},$$

et donc

$$\max_{V \in \mathcal{V}_{d-k+1}} \left(\min_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \right) = \lambda_k.$$

5. (a) Puisque A, Q et Q^T sont à coefficients réels, A' est à coefficients réels. De plus, du fait que A est symétrique, il vient

$$A'^T = (Q^T A Q)^T = Q^T A^T (Q^T)^T = Q^T A Q = A'.$$

La matrice A' est symétrique réelle.

- (b) i. $\langle x, y \rangle = X^T Y$.
 ii. Rappelons que les matrices colonnes des coefficients de $q(x)$ et $q(y)$ sont respectivement QX et QY . En conséquence, Il vient

$$\langle q(x), q(y) \rangle = (QX)^T (QY) = X^T Q^T QY \stackrel{Q^T Q = I_{d-1}}{=} X^T Y = \langle x, y \rangle.$$

- iii. Tout d’abord, il vient

$$\dim q(E'_k) = \dim \text{Vect} [q(e'_1), \dots, q(e'_k)] = \text{rg} [q(e'_1), \dots, q(e'_k)].$$

Maintenant, la famille $(q(e'_1), \dots, q(e'_k))$ est orthonormée :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2, \quad \langle q(e'_i), q(e'_j) \rangle = \langle e'_i, e'_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

En conséquence, la famille $(q(e'_1), \dots, q(e'_k))$ est libre donc son rang est son cardinal et il vient

$$\dim q(E'_k) = k.$$

- (c) Par la question 3 appliquée à A' , il vient $\lambda'_k = \max_{x \in (E'_k)^*} \frac{\langle f'(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}$.

Maintenant, pour tout $x \in (E'_k)^*$, nous avons d’une part

$$\langle f'(x), x \rangle = (A'X)^T X = X^T A'^T X = X^T Q^T A^T QX = [A(QX)]^T (QX) = \langle f[q(x)], q(x) \rangle$$

et d’autre part $\langle x, x \rangle = \langle q(x), q(x) \rangle$, par la question 5.(b)ii. En conséquence,

$$\lambda'_k = \max_{x \in (E'_k)^*} \frac{\langle f'(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \max_{x \in (E'_k)^*} \frac{\langle f[q(x)], q(x) \rangle}{\langle q(x), q(x) \rangle}.$$

Or q est injective :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, q(x) = 0 \implies \langle q(x), q(x) \rangle = 0 \implies \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0,$$

donc q réalise une bijection de $(E'_k)^*$ sur $q[(E'_k)^*] = q(E'_k)^*$ (car $q(0) = 0$). En conséquence,

$$\left\{ \frac{\langle f[q(x)], q(x) \rangle}{\langle q(x), q(x) \rangle} : x \in (E'_k)^* \right\} = \left\{ \frac{\langle f(z), z \rangle}{\langle z, z \rangle} : z \in q(E'_k)^* \right\}$$

puis

$$\lambda'_k = \max_{x \in (E'_k)^*} \frac{\langle f[q(x)], q(x) \rangle}{\langle q(x), q(x) \rangle} = \max_{z \in q(E'_k)^*} \frac{\langle f(z), z \rangle}{\langle z, z \rangle}.$$

- (d) Puisque q est injective, $\dim q(E'_k) = k$ donc $q(E'_k)$ est un élément de \mathcal{V}_k . Par la question 4.(b) appliquée à A , il vient

$$\lambda'_k = \max_{z \in q(E'_k)^*} \frac{\langle f(z), z \rangle}{\langle z, z \rangle} \geq \lambda_k.$$

- (e) En posant $F'_k = \text{Vect}(e'_k, \dots, e'_{d-1})$, et en appliquant la même stratégie qu’à la question 5.(c), on établit

$$\lambda'_k = \min_{z \in q(F'_k)^*} \frac{\langle f(z), z \rangle}{\langle z, z \rangle}.$$

Toujours par injectivité de q , $\dim q(F'_k) = d - k = d - (k + 1) + 1$ donc $q(F'_k)$ est un élément de $\mathcal{V}_{d-(k+1)+1}$. Par la question 4.(d) appliquée à A , il vient

$$\lambda'_k = \min_{z \in q(F'_k)^*} \frac{\langle f(z), z \rangle}{\langle z, z \rangle} \leq \max_{V \in \mathcal{V}_{d-(k+1)+1}} \left(\min_{z \in V^*} \frac{\langle f(z), z \rangle}{\langle z, z \rangle} \right) \leq \lambda_{k+1}.$$

Annexe 1

Posons $S = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$, $V_S = V^* \cap S$ et $\Delta = \{\langle f(x), x \rangle : x \in V_S\}$. Montrons dans un premier temps que $\sup \Delta$ est défini et vérifie $\sup \Delta = \sup \Gamma$.

- Puisque V contient un vecteur non nul y , le vecteur $z = \frac{y}{\|y\|}$ est bien défini, de norme 1 et il est dans V car V est stable par multiplication par un scalaire. En conséquence, V_S est non vide et Δ est une partie de \mathbb{R} non vide.
- Puisque l'on a $V_S \subset V^*$, tout vecteur x de V_S vérifie $\langle f(x), x \rangle = \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \sup \Gamma$. En conséquence Δ est une partie non vide de \mathbb{R} majorée par $\sup \Gamma$, donc $\sup \Delta$ existe et vérifie $\sup \Delta \leq \sup \Gamma$.
- Soit $x \in V^*$. Puisque V est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^d , $\frac{x}{\|x\|}$ est un élément de V de norme 1 donc un élément de V_S . Maintenant, $\frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \left\langle f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \leq \sup \Delta$, ce qui prouve que $\sup \Delta$ est un majorant de Γ , puis que $\sup \Gamma \leq \sup \Delta$.

Il ne nous reste plus qu'à établir l'existence de $\tilde{x} \in V_S$ vérifiant $\sup \Delta = \langle f(\tilde{x}), \tilde{x} \rangle$ pour conclure. Puisque S est borné, V_S est borné. Puisque l'on a $\langle f(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$, l'application $x \mapsto \langle f(x), x \rangle$ est polynomiale donc continue. Si l'on montre que V_S est fermé, l'existence de \tilde{x} est établie puisque toute fonction continue sur un fermé borné de \mathbb{R}^d est bornée et atteint ses bornes.

La caractérisation séquentielle des fermés n'étant pas explicitement au programme de PT, la seule manière d'établir que V_S est fermé est de montrer que son complémentaire V_S^c est ouvert. Soit $x \in V_S^c$. Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte $B_o(x, \varepsilon)$ soit incluse dans V_S^c . Puisque x n'est pas dans V_S , alors soit x n'est pas dans V^* , soit x n'est pas de norme 1.

- Si $\|x\| < 1$, en posant $\varepsilon = 1 - \|x\| > 0$, tout vecteur y de $B_o(x, \varepsilon)$ vérifie

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| < \varepsilon + \|x\| = 1,$$

donc $B_o(x, \varepsilon)$ est bien incluse dans V_S^c .

- Si $\|x\| > 1$, en posant $\varepsilon = \|x\| - 1$, tout vecteur y de $B_o(x, \varepsilon)$ vérifie

$$1 = \|x\| - \varepsilon = \|x - y + y\| - \varepsilon \leq \|x - y\| - \varepsilon + \|y\| < \|y\|,$$

donc $B_o(x, \varepsilon)$ est bien incluse dans V_S^c .

- Si $\|x\| = 1$ et $x \notin V^*$, nécessairement x est non nul, x n'est pas dans V et $\dim V < d$ (sinon $V = \mathbb{R}^d$ et $x \in V$). Notons x_V le projeté orthogonal de x sur V et posons $u = x - x_V$. Puisque x n'est pas dans V , u est non nul et il vérifie $d(x, V) = \|x - x_V\| = \|u\|$. Posons $\varepsilon = \|u\| > 0$ et considérons un vecteur y de $B_o(x, \varepsilon)$. Si par l'absurde y est dans V , le vecteur y vérifie $\|x - y\| < \varepsilon = \|x - x_V\| = d(x, V)$, ce qui est contradictoire. Si par l'absurde y est nul, le vecteur nul est un élément de $B_o(x, \varepsilon)$ donc $\|x\| < \varepsilon$. Or le théorème de Pythagore assure que $\|x\|^2 = \|x_V\|^2 + \|x - x_V\|^2 \geq \varepsilon^2$ et on obtient une contradiction. Ainsi y n'est pas dans V et il n'est pas nul donc il n'est pas dans V^* . La boule $B_o(x, \varepsilon)$ est bien incluse dans V_S^c .

Ainsi V_S est fermé, et ceci achève la preuve de l'existence de $\max \Gamma$.