

Partie I

1. (a) Pour $x > 0$ on a $\int_0^T e^{-xt} dt = \frac{1}{x} [-e^{-xt}]_{t=0}^{t=T} = \frac{1}{x} (1 - e^{-xT})$ d'où $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$.
 (b) La propriété est vérifiée pour $n = 0$. Supposons la vérifiée pour un entier $n - 1$.

$$\int_0^T t^n e^{-xt} dt = \frac{1}{x} [-t^n e^{-xt}]_{t=0}^{t=T} + \frac{n}{x} \int_0^T t^{n-1} e^{-xt} dt = -\frac{1}{x} T^n e^{-xT} + \frac{n}{x} \int_0^T t^{n-1} e^{-xt} dt.$$
 Avec $\lim_{T \rightarrow +\infty} T^n e^{-xT} = 0$ ($x > 0$) et l'hypothèse de récurrence on déduit:

$$I_n(x) = \frac{n}{x} I_{n-1}(x) = \frac{n(n-1)!}{x^n} = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$
 La propriété est donc vraie pour tout n .
 2. (a) E est une partie non vide de l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles. Si $f \in E$ on a $|f(t)| \leq Ct^n$ pour $t \geq A$ donc $|\alpha f(t)| \leq C|\alpha|t^n$ pour $t \geq A$. Si de plus $g \in E$ on a $|g(t)| \leq C't^{n'}$ pour $t \geq A'$. Pour $t \geq \max(A, A', 1)$ on a alors $|f(t) + g(t)| \leq Ct^n + C't^{n'} \leq (C + C')t^{\max(n, n')}$ donc $f + g \in E$.
 (b) Si f est bornée alors $|f(t)| \leq C$ pour tout t donc $n = 0$ convient.
 (c) Si $f(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ alors $\left| \frac{1}{t^n} f(t) \right| \leq \sum_{k=0}^n \frac{|a_k|}{t^{n-k}} \leq \sum_{k=0}^n |a_k| = C$ pour $t \geq 1$; on a bien $|f(t)| \leq Ct^n$.
 3. (a) Si $f \in E$ alors f est continue et $|f(t)| \leq Ct^n$ pour $t \geq A$. On en déduit $|f(t)e^{-xt}| \leq Ct^n e^{-xt}$ qui est intégrable sur $[A, +\infty[$ d'après la question I1b (il n'y a pas de problème sur $[0, A]$).
 (b) Soit g telle que $x \mapsto g(x, t)$ soit continue sur I , que $t \mapsto g(x, t)$ soit intégrable sur J et qu'il existe φ intégrable sur J vérifiant $|g(x, t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $(x, t) \in I \times J$ alors $G(x) = \int_J g(x, t) dt$ est continue sur I .
 (c) Pour $g(x, t) = f(t)e^{-xt}$, $J = [0, +\infty[$, $I = [x_0, +\infty[$ et $\varphi(t) = |f(t)|e^{-x_0 t}$ les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées. $\mathcal{L}(f)$ est donc continue sur $I = [x_0, +\infty[$. Comme c'est vrai pour tout $x_0 > 0$ on en déduit que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
 4. $\mathcal{L}$ est linéaire par linéarité de l'intégrale. C'est donc bien une application linéaire de E dans l'ensemble des fonctions continues sur $]0, +\infty[$.

Partie II

1. (a) $|\mathcal{L}(f)(x)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt} dt \leq \int_0^A |f(t)|e^{-xt} dt + \int_A^{+\infty} Ct^n e^{-xt} dt \leq \int_0^A |f(t)|e^{-xt} dt + C \frac{n!}{x^{n+1}}.$
 (b) Puisque f est continue sur $[0, A]$ elle y est bornée: $|f(t)| \leq M$. Par suite, $\int_0^A |f(t)|e^{-xt} dt \leq M \int_0^A e^{-xt} dt \leq M I_0(x) = \frac{M}{x}$ qui tend bien vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
 (c) $|\mathcal{L}(f)(x)| \leq \frac{M}{x} + C \frac{n!}{x^{n+1}}$ qui tend bien vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
 2. (a) Soit g telle que $x \mapsto g(x, t)$ soit de classe C^1 sur I , que $t \mapsto g(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ soient intégrables sur J et qu'il existe φ intégrable sur J vérifiant $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ pour tout $(x, t) \in I \times J$ alors $G(x) = \int_J g(x, t) dt$ est de classe C^1 sur I et $G'(x) = \int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt$.
 Pour $g(x, t) = f(t)e^{-xt}$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -tf(t)e^{-xt}$, $J = [0, +\infty[$, $I = [x_0, +\infty[$ et $\varphi(t) = |tf(t)|e^{-x_0 t}$ les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées puisque si $f \in E$ alors $t \mapsto tf(t)$ est aussi dans E ($|tf(t)| \leq Ct^{n+1}$ pour $t \geq A$).

- (b) On a donc $\mathcal{L}(f)'(x) = - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-xt} dt$ pour tout $x \geq x_0$, donc pour tout $x > 0$ puisque $x_0 > 0$ est arbitraire.
3. (a) En intégrant par parties on obtient: $\int_0^T f'(t) e^{-xt} dt = [f(t) e^{-xt}]_{t=0}^{t=T} + x \int_0^T f(t) e^{-xt} dt = f(T) e^{-xT} - f(0) + x \int_0^T f(t) e^{-xt} dt$. Avec $|f(T) e^{-xT}| \leq C T^n e^{-xT}$ qui tend vers 0 quand T tend vers $+\infty$ on obtient $\mathcal{L}(f')(x) = x \mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.
- (b) Puisque $f' \in E$ on a $|h(t)| = |t f'(t)| \leq C t^{n+1}$ pour $t \geq A$, donc $h \in E$. En intégrant par parties on obtient: $\int_0^T f'(t) t e^{-xt} dt = [f(t) t e^{-xt}]_{t=0}^{t=T} - \int_0^T f(t) e^{-xt} dt + x \int_0^T t f(t) e^{-xt} dt = T f(T) e^{-xT} - \int_0^T f(t) e^{-xt} dt + x \int_0^T t f(t) e^{-xt} dt$. Avec $|T f(T) e^{-xT}| \leq C T^{n+1} e^{-xT}$ qui tend vers 0 quand T tend vers $+\infty$ on obtient $\mathcal{L}(h)(x) = -\mathcal{L}(f)(x) - x \mathcal{L}(f)'(x)$.
- (c) Il suffit d'appliquer le résultat du II3a à f' puis à f : $\mathcal{L}(f'')(x) = x \mathcal{L}(f)'(x) - f'(0) = x(x \mathcal{L}(f)(x) - f(0)) - f'(0) = x^2 \mathcal{L}(f)(x) - x f(0) - f'(0)$.

Partie III

1. Le théorème de Cauchy s'applique puisque les fonctions $t \mapsto -t$ et $t \mapsto 2p$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et que le coefficient de y'' ne s'annule pas. Il y a une unique solution, notée Y , qui vérifie la condition initiale $Y(0) = 1$ et $Y'(0) = 0$.
2. De $f''(t) - t f'(t) + 2p f(t) = 0$ on déduit par linéarité de $\mathcal{L}$ et en posant $h(t) = t f'(t)$: $\mathcal{L}(f'')(x) - \mathcal{L}(h)(x) + 2p \mathcal{L}(f)(x) = 0$ d'où $x^2 \mathcal{L}(f)(x) - x f(0) - f'(0) - (-\mathcal{L}(f)(x) - x \mathcal{L}(f)'(x)) + 2p \mathcal{L}(f)(x) = 0$ soit encore avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$: $x \mathcal{L}(f)'(x) + (x^2 + 2p + 1) \mathcal{L}(f)(x) = x$. $U = \mathcal{L}(f)$ est donc bien solution de (J) sur $]0, +\infty[$.
3. (a) $f_{n+1}(x) = \int_0^x t^{2n+2} e^{\frac{t^2}{2}} dt = [t^{2n+2} e^{\frac{t^2}{2}}]_0^x - (2n+2) \int_0^x t^{2n+1} e^{\frac{t^2}{2}} dt = x^{2n+2} e^{\frac{x^2}{2}} - 2(n+1) f_n(x)$.
- (b) On en déduit $\frac{f_{n+1}(x)}{(-2)^{n+1}(n+1)!} = \frac{f_n(x)}{(-2)^n n!} + \frac{x^{2n+2} e^{\frac{x^2}{2}}}{(-2)^{n+1}(n+1)!}$ d'où par récurrence: $\frac{f_n(x)}{(-2)^n n!} = f_0(x) + \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k} e^{\frac{x^2}{2}}}{(-2)^k k!}$. Avec $f_0(x) = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$ on obtient $\frac{f_n(x)}{(-2)^n n!} = -1 + \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k} e^{\frac{x^2}{2}}}{(-2)^k k!}$ d'où $f_n(x) = -(-2)^n n! + \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^{n-k} n! x^{2k} e^{\frac{x^2}{2}}}{k!} = (-1)^{n+1} 2^n n! + n! e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k x^{2n-2k}}{(n-k)!}$ après avoir remplacé k par $n-k$.
4. (a) L'équation sans second membre associée à (J) s'écrit encore $u'(x) + \left(x + \frac{2p+1}{x}\right) u(x) = 0$. Une primitive de $x \mapsto x + \frac{2p+1}{x}$ est $\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + (2p+1) \ln(x)$ et $e^{\varphi(x)} = x^{2p+1} e^{\frac{x^2}{2}}$. Par suite $(x^{2p+1} e^{\frac{x^2}{2}} u(x))' = (e^{\varphi(x)} u(x))' = 0$ donc une base de l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation sans second membre associée à (J) est la fonction $x \mapsto \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+1}}$.
- (b) Après avoir multiplié par $x^{2p} e^{\frac{x^2}{2}}$ (J) devient $(x^{2p+1} e^{\frac{x^2}{2}} u(x))' = x^{2p+1} e^{\frac{x^2}{2}}$ donc $x^{2p+1} e^{\frac{x^2}{2}} u(x) = f_p(x) + C' = p! e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^p \frac{(-2)^k x^{2p-2k}}{(p-k)!} + C$ d'où $u(x) = p! \sum_{k=0}^p \frac{(-2)^k}{x^{2k+1} (p-k)!} + C \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+1}}$.
5. (a) En utilisant le IIb on a: $U_0(x) = p! \sum_{k=0}^p \frac{(-2)^k}{x^{2k+1} (p-k)!} = p! \sum_{k=0}^p \frac{(-2)^k}{(2k)! (p-k)!} \int_0^{+\infty} t^{2k} e^{-xt} dt = \mathcal{L}(R_0)(x)$ si R_0 est la restriction de $R(x) = p! \sum_{k=0}^p \frac{(-2)^k}{(2k)! (p-k)!} x^{2k}$.

- (b) En reprenant les calculs faits au III2, on obtient que $\mathcal{L}(R_0'' - XR_0' + 2pR_0) = 0$ puisque $\mathcal{L}(R_0)$ est solution de (J) et qu'il vérifie de plus $R_0(0) = \frac{p!}{p!} = 1$ et $R_0'(0) = 0$. Or si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $\mathcal{L}(P)(x) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{k!}{x^{k+1}}$ n'est la fonction nulle que si $P = 0$ (c'est l'injectivité de la transformée de Laplace pour les polynômes). On en déduit que $R_0'' - XR_0' + 2pR_0 = 0$ et puisque de plus $R_0(0) = 1$ et $R_0'(0) = 0$, R est bien l'unique solution de (P).
On peut aussi montrer directement à partir des coefficients du polynôme R qu'il vérifie bien $R'' - XR' + 2pR = 0$, $R(0) = 1$ et $R'(0) = 0$.

Partie IV

- $L = \mathcal{L}(f)(1)$.
- g est continue (c'est une primitive) et bornée sur $\mathbb{R}_+$ car $|g(t)| \leq \int_0^t |f(s)|e^{-s} ds \leq \int_0^{+\infty} |f(s)|e^{-s} ds$ qui existe car $s \mapsto f(s)e^{-s}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (montré au I3a). Avec le I2b on déduit que $g \in E$.
- $g'(t) = f(t)e^{-t}$ est dans E car elle est continue et $|g'(t)| \leq |f(t)| \leq Ct^n$ pour $t \geq A$. On applique le II3a: $\mathcal{L}(g')(x) = x\mathcal{L}(g)(x) - g(0) = x\mathcal{L}(g)(x)$ donc $\mathcal{L}(g)(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(x+1)t} dt = \frac{1}{x} \mathcal{L}(f)(x+1)$.
 - φ est continue sur $]0, 1]$ car $\ln$ et g sont continues. Elle est aussi continue en 0 car $\lim_{u \rightarrow 0} g(-\ln u) = \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = L$.
 - Pour $x > 0$ la fonction $t \mapsto g(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'application $u \mapsto -\ln(u)$ est une bijection de classe C^1 de $J =]0, 1]$ sur $I =]0, +\infty]$; on peut donc écrire:

$$\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt} dt = \int_0^1 g(-\ln(u))u^x \frac{1}{u} du = \int_0^1 \varphi(u)u^{x-1} du.$$
- Pour $x = n+1$ on a $\int_0^1 \varphi(u)u^n du = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-(n+1)t} dt = \frac{1}{n+1} \mathcal{L}(f)(n+2) = 0$ puisque $\mathcal{L}(f) = 0$.
- $\cos(p\pi u) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(p\pi)^{2n}}{(2n)!} u^{2n}$ de rayon de convergence infini.
 - Puisque φ est continue sur $[0, 1]$ elle y est bornée: $|\varphi(u)| \leq M$.
En posant $g_n(u) = (-1)^n \frac{(p\pi)^{2n}}{(2n)!} u^{2n} \varphi(u)$ on a donc $|g_n(u)| \leq \frac{(p\pi)^{2n}}{(2n)!} M$ sur $[0, 1]$. La série de fonctions continues $(\sum g_n)$ converge donc normalement sur $[0, 1]$. On peut donc écrire:

$$\int_0^1 \cos(p\pi u) \varphi(u) du = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(p\pi)^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 u^{2n} \varphi(u) du = 0.$$
- ψ est continue sur $[-1, 1]$ car elle est paire et φ est continue sur $[0, 1]$. Par période 2 elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.
 - Seuls les coefficients a_p sont à calculer car la fonction est paire. Pour une fonction T -périodique $a_p = \frac{2}{T} \int_0^T \psi(t) \cos(\frac{2\pi}{T} pu) du$ donc avec $T = 2$ et la parité on obtient: $a_p = 2 \int_0^1 \psi(t) \cos(p\pi u) du = 0$ avec le IV5b. L'égalité de Parseval entraîne alors $\int_0^2 (\psi(u))^2 du = (\frac{a_0}{2})^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} a_p^2 = 0$. Par continuité de ψ on en déduit $\psi = 0$ sur $[0, 2]$ donc sur $\mathbb{R}$ par période 2.
- On en déduit que φ est la fonction nulle sur $[0, 1]$, donc g est la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$. Sa dérivée $t \mapsto f(t)e^{-t}$ est donc nulle, d'où f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

- (b) On a montré que $\mathcal{L}(f) = 0$ entraîne que $f = 0$; le noyau de $\mathcal{L}$ est donc réduit à 0: l'application linéaire $\mathcal{L}$ est bien injective.