

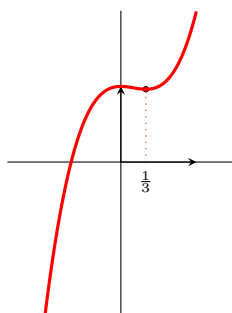
MATHÉMATIQUES

– une proposition de correction –

EXERCICE 1

1. φ est dérivable sur $[-1; 1]$ et, pour tout $t \in [-1; 1]$, $\varphi'(t) = 6t^2 - 2t = 2t(3t - 1)$.

φ est donc croissante sur $[-1; 0]$, décroissante sur $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$:



2. f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 , et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$.

On en déduit facilement que $(0, 0)$ est l'unique point critique de f .

3. On observe que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t, 0) - f(0, 0) = t^3$ n'est pas de signe constant, y compris au voisinage de 0. La valeur de $f(0, 0)$ n'est donc pas un extremum local pour f .

Or, si f admettait un extremum local, celui-ci serait atteint en un point critique. Comme, au niveau de notre point critique, f n'admet pas d'extremum local, elle n'en admet nulle part sur \mathbb{R}^2 .

4. 4.1 D est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^2 (presque par définition). Puisque \mathbb{R}^2 est de dimension finie, et comme f est continue sur D , on en déduit que f est bornée sur D et atteint ses bornes sur cet ensemble, autrement dit f admet des extremums globaux sur D .

4.2 Notons D' le disque ouvert de centre O et de rayon 2, et C le cercle de centre O et de rayon 2.

On observe que $D = D' \cup C$, et que D' est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Sur cet ouvert, f est de classe \mathcal{C}^1 , et donc, si nos extremums étaient atteints sur D' , ils seraient atteints en un point critique de f . Or $(0, 0)$ est l'unique point critique de f : il appartient à D' , pas f n'y admet pas d'extremum local (et encore moins global).

Par conséquent, puisque f admet des extremums globaux sur D , et comme ceux-ci ne sont pas atteints sur D' , ils sont forcément atteints sur C .

4.3 $f(M) = (2 \cos(\alpha))^3 + (2 \sin(\alpha))^2 = 8 \cos^3(\alpha) + 4 \sin^2(\alpha) = 8 \cos^3(\alpha) + 4(1 - \cos^2(\alpha)) = 4(2 \cos^3(\alpha) - \cos^2(\alpha) + 1)$, donc $f(M) = 4\varphi(\cos(\alpha))$.

4.4 D'après le travail effectué en question préliminaire, φ atteint son minimum en -1 (et $\varphi(-1) = -2$) et son maximum en 1 (et $\varphi(1) = 2$).

Ainsi, f atteint son minimum au point $M = (2 \cos(\alpha), 2 \sin(\alpha))$ lorsque $\alpha = \pi$, c'est-à-dire en $M = (-2, 0)$ (et ce minimum vaut -8) et f atteint son maximum au point $M = (2 \cos(\alpha), 2 \sin(\alpha))$ lorsque $\alpha = 0$, c'est-à-dire en $M = (2, 0)$ (et ce maximum vaut 8).

EXERCICE 2

1. Si on évalue (E) pour $x = 0$, il vient : $y(0) = 0$.

2. 2.1 On peut commencer par observer que $a_0 = f(0) = 0$ (d'après 1.) et $a_1 = f'(0) = 1$ (par hypothèse).

De plus, en tant que somme d'une série entière, f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] - R ; R[$ et, pour tout $x \in] - R ; R[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} \text{ et } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Ainsi, puisque f est solution de (E) , $x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} - (x^2 + x + 1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$.

Puisque $x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n(n-1) x^n$, $x \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n x^n$ et :

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= a_0 + (a_0 + a_1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} (a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) x^n \end{aligned}$$

l'égalité issue de (E) se réécrit alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n n(n-1) x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n x^n - \left(a_0 + (a_0 + a_1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} (a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) x^n \right) = 0$$

ou encore : $a_1 x - a_0 - (a_0 + a_1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} (-a_{n-2} - a_{n-1} + (n(n-1) + n - 1)a_n) x^n = 0$.

Par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit que $a_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 2$:

$$a_{n-2} + a_{n-1} - (n^2 - 1) a_n = 0$$

2.2 Raisonnons par récurrence (double) et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n) : |a_n| \leq \frac{1}{(n-1)!}$.

--> Puisque $a_1 = 1$ et $a_2 = \frac{a_1 + a_0}{2^2 - 1} = \frac{1}{3}$, les inégalités $a_1 \leq \frac{1}{0!}$ et $a_2 \leq \frac{1}{1!}$ sont vérifiées.

--> Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies : montrons $\mathcal{P}(n+2)$.

Puisque, d'après 2.1, $((n+2)^2 - 1) a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, il vient :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{a_{n+1}}{(n+3)(n+1)} + \frac{a_n}{(n+3)(n+1)} \\ &\leq \frac{1}{(n+3)(n+1) \times n!} + \frac{1}{(n+3)(n+1) \times (n-1)!} \text{ d'après } \mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \times \underbrace{\left(\frac{1}{n+3} + \frac{n}{n+3} \right)}_{= \frac{n+1}{n+3} < 1} \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+2)$ est donc vraie.

On conclut à l'aide du principe de récurrence (double).

2.3 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n x^n| \leq \frac{|x|^n}{(n-1)!} = |x| \times \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}$, et comme $\sum \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}$ est une série (exponentielle) convergente, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |a_n x^n|$ est convergente, autrement dit $\sum a_n x^n$ est absolument convergente, donc convergente.

La fonction f est donc définie sur \mathbb{R} ($R = +\infty$).

3. 3.1 $z(0) = 0 \times y(0) \times e^0 = 0$.

De plus, z est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = y(x)e^x + xy'(x)e^x + xy(x)e^x$, donc $z'(0) = y(0) = 0$.

3.2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} z''(x) &= y'(x)e^x + y(x)e^x + y'(x)e^x + xy''(x)e^x + xy'(x)e^x + y(x)e^x + xy'(x)e^x + xy(x)e^x \\ &= e^x (xy''(x) + (2 + 2x)y'(x) + (2 + x)y(x)) \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} xz''(x) - (2x + 1)z'(x) &= xe^x (xy''(x) + (2 + 2x)y'(x) + (2 + x)y(x)) \\ &\quad - (2x + 1)(y(x)e^x + xy'(x)e^x + xy(x)e^x) \\ &= e^x (x^2y''(x) + xy'(x) - (x^2 + x + 1)y(x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

3.3 Une équation différentielle

3.3.1 $u' - \left(2 + \frac{1}{x}\right)u = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.

Puisque $x \mapsto -(2x + \ln(x))$ est une primitive de $x \mapsto -\left(2 + \frac{1}{x}\right)$ sur \mathbb{R}_+^* , les solutions de notre équation différentielle sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{2x + \ln(x)} = \lambda x e^{2x}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.3.2 $x e^{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc les solutions décrites précédemment sont toutes prolongeables par continuité en 0.

3.4 Soit $c \in \mathbb{R}$.

Notons φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = c x e^{2x}$.

φ est dérivable sur \mathbb{R} , et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x\varphi'(x) - (2x + 1)\varphi(x) = x(ce^{2x} + c2xe^{2x}) - (2x + 1)cxe^{2x} = 0$$

φ est donc solution de (F) sur \mathbb{R} .

3.5 Puisque z' est solution de (F) sur \mathbb{R} , et comme la fonction φ vue précédemment est la seule solution de (F) sur \mathbb{R} , il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = c x e^{2x}$.

Comme $z(0) = 0$, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} z(x) &= \int_0^x c t e^{2t} dt \\ &= c \left(\left[t \times \frac{e^{2t}}{2} \right]_0^x - \int_0^x 1 \times \frac{e^{2t}}{2} dt \right) \quad (\text{intégration par parties}) \\ &= c \left(\frac{x e^{2x}}{2} - \left[\frac{e^{2t}}{4} \right]_0^x \right) \\ &= c \left(\frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x} - 1}{4} \right) \\ &= \frac{c}{4} \times ((2x - 1)e^{2x} + 1) \end{aligned}$$

En posant $a = c/4$, on obtient le résultat voulu.

3.6 En reprenant le raisonnement initial, puisque f est une solution développable en série entière de (E) , définie sur \mathbb{R} , elle est, en particulier, de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , et la fonction $x \mapsto x f(x) e^x$ est solution de (F) sur \mathbb{R} : il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x f(x) e^x = a((2x - 1)e^{2x} + 1)$.

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = a \left(2e^x - \frac{e^x - e^{-x}}{x} \right) = 2a \left(e^x - \frac{\text{sh}(x)}{x} \right)$.

On peut récrire, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = 2a \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = 2a \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right)$$

Cette écriture demeure valable pour $x = 0$, et confirme que f est développable en série entière sur \mathbb{R} . De plus, on en déduit que $f'(0) = 2a$ (coefficient de x dans le développement en série entière), et comme $f'(0) = 1$, $a = 1/2$.

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x - \frac{\text{sh}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On pourrait conclure ce raisonnement par la réciproque, c'est-à-dire vérifier que la fonction finalement obtenue est bel et bien solution de (E) sur \mathbb{R} , mais ça n'est pas explicitement demandé.

EXERCICE 3

1. Puisque $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, il est facile de voir que $\text{Im}(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, d'en déduire que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Im}(J)$ (c'est une famille génératrice formée d'un seul vecteur non nul), et que $\text{rg}(J) = 1$.

2. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$X \in \text{Ker}(J) \iff JX = 0_{n1} \iff x_1 + \cdots + x_n = 0 \iff x_1 = -x_2 - \cdots - x_n$$

$$\text{Ainsi, } \text{Ker}(J) = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 - \cdots - x_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc une famille génératrice de $\text{Im}(J)$, et comme elle est formée de $n - 1$ vecteurs, et

puisque, par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(J)) = n - 1$, c'est une base de $\text{Ker}(J)$.

3. J est une matrice symétrique réelle : par le théorème spectral, elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. $\text{Ker}(J)$ est le sous-espace propre de J associé à la valeur propre 0 : on l'a entièrement déterminé en 2.

D'autre part, si on note λ la « dernière » valeur propre de J , $\text{tr}(J) = \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n-1 \text{ termes}} + \lambda$, donc $\lambda = n$. Il est facile de

constater que $J \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, si bien que $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_n(J)$. J étant diagonalisable, on montre rapidement que

$\dim(E_n(J)) = 1$, et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc une base de cet espace propre.

J est donc semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$.

5. On a montré que $\text{Im}(J) = \text{Vect}(e)$, où $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\text{Ker}(J) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) ; x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\}$.

Or, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $x_1 + \cdots + x_n = 0$ si et seulement si $(X | e) = 0$.

Par conséquent, $\text{Ker}(J) = \{e\}^\perp = \text{Vect}(e)^\perp = \text{Im}(J)^\perp$.

Puisque \mathbb{R}^n est de dimension finie, on en déduit que $\text{Im}(J)$ et $\text{Ker}(J)$ sont orthogonaux (donc) supplémentaires dans \mathbb{R}^n .

6. $M_r = rJ + (1 - r)I_n \in \text{Vect}(J, I_n)$.

7. Notons P une matrice de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}JP = D$ (vue en 4.).

$P^{-1}MP = P^{-1}(rJ + (1 - r)I_n)P = rP^{-1}JP + (1 - r)P^{-1}I_nP = rD + (1 - r)I_n$, et comme $rD + (1 - r)I_n$ est une matrice diagonale (que l'on peut noter Δ_r), cette égalité justifie la diagonalisabilité de M_r .

8. 8.1 Pour tout $(Y_1, Y_2) \in (\mathbb{R}^n)^2$, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$f_r(X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = X^\top M_r(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 X^\top M_r Y_1 + \lambda_2 X^\top M_r Y_2 = \lambda_1 f_r(X, Y_1) + \lambda_2 f_r(X, Y_2)$$

$Y \mapsto f_r(X, Y)$ est donc une application linéaire.

De plus, pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$, $f_r(X, Y) = (X | M_r Y) \in \mathbb{R}$, donc $Y \mapsto f_r(X, Y)$ est à valeurs dans \mathbb{R} : il s'agit d'une forme linéaire sur \mathbb{R}^n .

8.2 Pour tout $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$:

$$f_r(X, Y) = (X | M_r Y) = (M_r Y | X) = (M_r Y)^\top X = \underbrace{Y^\top M_r^\top X}_{\text{car } M_r \text{ est symétrique}} = Y^\top M_r X = f_r(Y, X)$$

8.3 Puisque J est symétrique réelle, d'après le théorème spectral, la matrice P introduite en **7.** peut être supposée orthogonale. Par conséquent, en notant $Q = P^{-1} = P^\top$, il vient, pour tout $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$:

$$f_r(X, Y) = X^\top P \Delta_r P^{-1} Y = X^\top Q^\top \Delta_r Q Y = (QX)^\top \Delta_r QY$$

On obtient ainsi le résultat voulu.

8.4 On a vu en **8.2** que f_r est symétrique, et en **8.1** qu'elle est linéaire selon sa deuxième variable, donc (par symétrie) bilinéaire.

De plus, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, en notant $X' = PX = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} f_r(X, X) &= (X')^\top \Delta_r X' = (X')^\top (rD + (1-r)I_n) X' = r(X')^\top D X' + (1-r)(X')^\top X' \\ &= (1-r)x_1'^2 + \dots + (1-r)x_{n-1}'^2 + (rn+1-r)x_n'^2 \end{aligned}$$

P étant inversible, $X = 0$ si et seulement si $X' = 0$.

Ainsi, pour que f_r soit défini-positif, il faut et il suffit que $1-r > 0$ et $rn+1-r > 0$, c'est-à-dire que $-\frac{1}{n-1} < r < 1$.

Finalement, f_r est un produit scalaire si et seulement si $-\frac{1}{n-1} < r < 1$.

EXERCICE 4

1. $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = k) = p(1-p)^{k-1}$, si bien que Z possède une espérance finie et une variance : $E(Z) = \frac{1}{p}$ et $V(Z) = \frac{1-p}{p^2}$.

2. X_1 et X_2 sont indépendantes lorsque, en notant E_1 l'ensemble d'arrivée de X_1 et E_2 celui de X_2 :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E_1) \times \mathcal{P}(E_2), P(X_1 \in A, X_2 \in B) = P(X_1 \in A) \times P(X_2 \in B)$$

3. $(X \geq k) = \bigcup_{n \geq k} (X = n)$, et comme les événements $(X = n)$ ($n \geq k$) sont deux à deux incompatibles :

$$P(X \geq k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} pq^n = p \sum_{n=k}^{+\infty} q^n = p \sum_{n'=0}^{+\infty} q^{n'+k} = pq^k \sum_{n'=0}^{+\infty} q^{n'} = pq^k \times \frac{1}{1-q} = q^k$$

4. 4.1 Puisque $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$, $(X+Y)(\Omega) = \{k+\ell; (k, \ell) \in \mathbb{N}^2\} = \mathbb{N}$.

4.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X+Y = n) = \bigcup_{0 \leq k \leq n} (X = k) \cap (Y = n-k)$, donc :

$$\begin{aligned} P(X+Y = n) &= \sum_{k=0}^n P((X = k) \cap (Y = n-k)) \\ &\quad \text{par incompatibilité des événements } (X = k) \cap (Y = n-k) \ (0 \leq k \leq n) \\ &= \sum_{k=0}^n P(X = k) \times P(Y = n-k) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= \sum_{k=0}^n pq^k \times pq^{n-k} \\ &= (n+1)p^2 q^n \end{aligned}$$

4.3 Détermination de la loi de X sachant $(X+Y = n)$

4.3.1 Puisque Y est à valeurs positives, X ne peut prendre une valeur strictement supérieure à $X+Y$, et donc $P_{(X+Y=n)}(X = k) = 0$ lorsque $k > n$.

4.3.2 Si $k \leq n$, par la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} P_{(X+Y=n)}(X=k) &= \frac{P((X=k) \cap (X+Y=n))}{P(X+Y=n)} = \frac{P((X=k) \cap (Y=n-k))}{P(X+Y=n)} \\ &= \frac{pq^k \times pq^{n-k}}{(n+1)p^2q^n} = \frac{p^2q^n}{(n+1)p^2q^n} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \frac{1}{n+1}$, on obtient le résultat voulu.

5. 5.1 $V(\Omega) = \mathbb{Z}$ et $M(\Omega) = \mathbb{N}$.

5.2 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(M \geq k) = (X \geq k) \cap (Y \geq k)$, donc, par indépendance de X et Y :

$$P(M \geq k) = P(X \geq k) \times P(Y \geq k) = q^k \times q^k = q^{2k}$$

5.3 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(M = k) = (M \geq k) \setminus (M \geq k+1)$, donc :

$$P(M = k) = P(M \geq k) - P((M \geq k) \cap (M \geq k+1)) = P(M \geq k) - P(M \geq k+1) = q^{2k} - q^{2k+2} = q^{2k} (1 - q^2)$$

5.4 Si $r < 0$, $(M = k) \cap (V = r) = (Y = k) \cap (X = k - r)$, donc, par indépendance de X et Y :

$$P(M = k) \cap (V = r) = P(Y = k)P(X = k - r) = pq^k \times pq^{k-r} = p^2q^{2k-r}$$

De même, si $r \geq 0$, $(M = k) \cap (V = r) = (X = k) \cap (Y = r + k)$, donc :

$$P(M = k) \cap (V = r) = P(X = k)P(Y = k + r) = pq^k \times pq^{k+r} = p^2q^{2k+r}$$

5.5 Puisque $((M = 0), \dots, (M = n), \dots)$ est un système complet d'événements, pour tout $r \in \mathbb{Z}$:

$$P(V = r) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((V = r) \cap (M = k))$$

$$\text{Ainsi, si } r < 0, P(V = r) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^2q^{2k-r} = p^2q^{-r} \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k = p^2q^{-r} \times \frac{1}{1-q^2} = \frac{p}{q^r(1+q)},$$

$$\text{et, de même, si } r \geq 0, P(V = r) = \frac{pq^r}{1+q}.$$

5.6 M et V sont indépendantes si et seulement si, pour tout $(k, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$,

$$P((M = k) \cap (V = r)) = P(M = k)P(V = r).$$

Or, si $r < 0$, $P((M = k) \cap (V = r)) = p^2q^{2k-r}$ et :

$$P(M = k)P(V = r) = q^{2k} (1 - q^2) \times \frac{p}{q^r(1+q)} = \frac{q^{2k} (1 - q) p}{q^r} = p^2q^{2k-r}$$

Par ailleurs, si $r \geq 0$, $P((M = k) \cap (V = r)) = p^2q^{2k+r}$ et :

$$P(M = k)P(V = r) = q^{2k} (1 - q^2) \times \frac{pq^r}{(1+q)} = q^{2k} (1 - q) pq^r = p^2q^{2k+r}$$

Dans les deux cas, $P((M = k) \cap (V = r)) = P(M = k)P(V = r)$.

M et V sont donc indépendantes.