

Banque PT 2008 — épreuve A

Partie I — PARTIE A

Question I.1

(C'est une question de cours.)

$\mathcal{Q}_1$ est un ellipsoïde.

$\mathcal{Q}_2$ est un hyperboloïde à deux nappes.

Aucune de ces deux surfaces n'est de révolution.

Question I.2

La matrice A s'écrit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Question I.3

On évalue

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} 3-X & 2 & 1 \\ 2 & -X & -2 \\ 1 & -2 & 3-X \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_2} \begin{vmatrix} 4-X & 2 & 1 \\ 0 & -X & -2 \\ 4-X & -2 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (4-X) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -X & -2 \\ 1 & -2 & 3-X \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} (4-X) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -X & -2 \\ 0 & -4 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (4-X)(X^2 - 2X - 8) = -(X-4)^2(X+2). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 4 > \lambda_3 = -2$.

Question I.4

$E_1 = E_2 = \text{Ker}(A - 4I)$ est le plan d'équation $x = 2y + z$.

$E_3 = \text{Ker}(A + 2I)$ est la droite orthogonale, dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On pose donc $\vec{u}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, on choisit un vecteur orthogonal, comme par exemple $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

finalement $\vec{u}_2 = \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Question I.5

Dans le repère $(O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, $\mathcal{Q}_3$ a pour équation $4X^2 + 4Y^2 - 2Z^2 = 1$, et on reconnaît un hyperboloïde à une nappe de révolution autour de l'axe des Z donc de la droite $(O; \vec{u}_3)$.

Partie II — PARTIE B

Question II.1

On vérifie que les coordonnées de $M(t)$ vérifient l'équation $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, qui est équation d'une hyperbole. Mais on ne trouve qu'une des deux branches, car, quand t décrit $\mathbb{R}$, $x(t)$ décrit seulement $[0, +\infty[$ alors que $y(t)$ décrit $\mathbb{R}$ tout entier.

L'hyperbole admet comme distance focale $c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ et comme excentricité $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Question II.2

Les asymptotes de Γ sont les deux droites d'équations $3x = 2y$ et $3x = -2y$.

La figure 1 page 2 montre l'hyperbole (la branche qui ne nous intéresse pas est en pointillés) et les deux asymptotes.

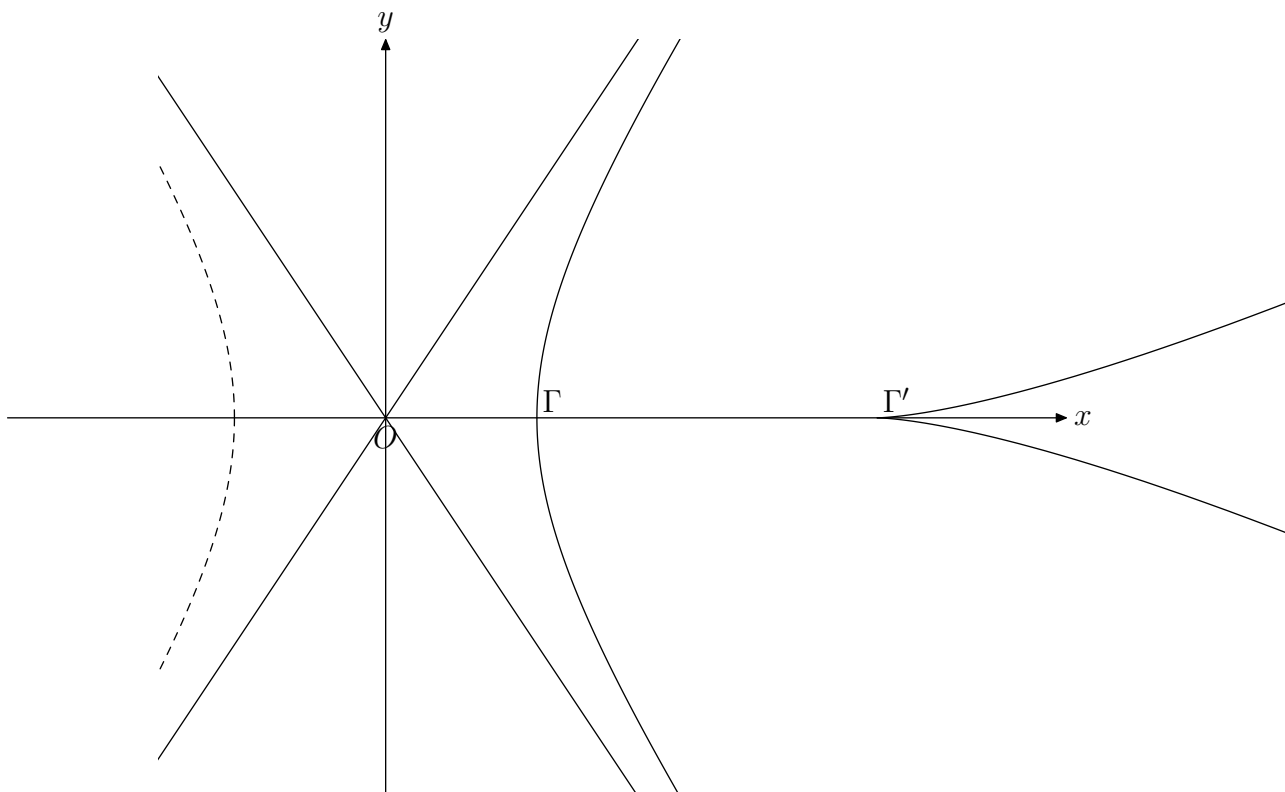


Figure 1 la courbe Γ , ses asymptotes et sa développée Γ'

Question II.3

On évalue $\overrightarrow{M'(t)} \begin{pmatrix} 2 \operatorname{sh} t \\ 3 \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$ donc $\frac{ds}{dt} = \|\overrightarrow{M'(t)}\| = \sqrt{4 \operatorname{sh}^2 t + 9 \operatorname{ch}^2 t}$, et on en déduit les vecteurs du repère de Frénet :

$$\overrightarrow{T(t)} = \frac{1}{\sqrt{4 \operatorname{sh}^2 t + 9 \operatorname{ch}^2 t}} \begin{pmatrix} 2 \operatorname{sh} t \\ 3 \operatorname{ch} t \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad \overrightarrow{N(t)} = \frac{1}{\sqrt{4 \operatorname{sh}^2 t + 9 \operatorname{ch}^2 t}} \begin{pmatrix} -3 \operatorname{ch} t \\ 2 \operatorname{sh} t \end{pmatrix}.$$

Question II.4

On utilise la formule de Frénet : $\frac{d}{ds} \overrightarrow{T(t)} = \frac{1}{R} \overrightarrow{N(t)}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \overrightarrow{T(t)} &= \frac{1}{\sqrt{4 \operatorname{sh}^2 t + 9 \operatorname{ch}^2 t}} \frac{d}{dt} \overrightarrow{T(t)} = \begin{pmatrix} -\frac{26 \operatorname{ch} t \operatorname{sh}^2 t}{(4 \operatorname{sh}^2 t + 9 \operatorname{ch}^2 t)^2} + \frac{2 \operatorname{ch} t}{4 \operatorname{sh}^2 t + 9 \operatorname{ch}^2 t} \\ -\frac{39 \operatorname{ch}^2 t \operatorname{sh} t}{(4 \operatorname{sh}^2 t + 9 \operatorname{ch}^2 t)^2} + \frac{3 \operatorname{sh} t}{4 \operatorname{sh}^2 t + 9 \operatorname{ch}^2 t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(4 \operatorname{sh}^2 t + 9 \operatorname{ch}^2 t)^2} \begin{pmatrix} 72 \operatorname{ch} t \\ -48 \operatorname{sh} t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que $R = -\frac{(4\operatorname{sh}^2 t + 9\operatorname{ch}^2 t)^{3/2}}{24}$.

Question II.5

Les coordonnées du centre de courbure sont alors

$$\begin{cases} x_C = 2\operatorname{ch} t + \frac{(4\operatorname{sh}^2 t + 9\operatorname{ch}^2 t)^2 \operatorname{ch} t}{8} = \frac{13}{2} \operatorname{ch}^3 t \\ y_C = 3\operatorname{sh} t - \frac{(4\operatorname{sh}^2 t + 9\operatorname{ch}^2 t)^2 \operatorname{sh} t}{12} = -\frac{13}{3} \operatorname{sh}^3 t \end{cases}$$

On a montré que Γ' est la développée de Γ .

Question II.6

On observe que $C(-t)$ et $C(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe $x'x$.

Question II.7

Au voisinage de $t = 0$, on a $x_C(t) = \frac{13}{2}(1 + \frac{t^2}{2} + o(t^3))^3 = \frac{13}{2}(1 + \frac{3t^2}{2} + o(t^3))$ et $y_C(t) = -\frac{13}{3}t^3 + o(t^3)$, ce qui se réécrit $\overrightarrow{OC(t)} = \begin{pmatrix} 13/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 39/4 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -13/3 \end{pmatrix} + o(t^3)$.

La courbe Γ' présente donc un point de rebroussement de première espèce de coordonnées $(13/2, 0)$ avec une demi tangente horizontale.

Question II.8

Quand $t \rightarrow +\infty$, $x_C \sim \frac{13}{2} \frac{e^{6t}}{8} = \frac{13}{16} e^{6t}$ et $y_C \sim -\frac{13}{3} \frac{e^{6t}}{8} = -\frac{13}{24} e^{6t}$.

On évalue donc $2x_C + 3y_C = 13(\operatorname{ch}^3 t - \operatorname{sh}^3 t) = 13(\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t)(\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t + \operatorname{sh}^2 t)$.

Ainsi $2x_C + 3y_C \sim 13e^t(3\frac{e^{2t}}{4} - \frac{39}{4}e^{3t}) \rightarrow +\infty$ ce qui montre qu'il n'y a pas asymptote mais seulement une direction asymptotique, dont la direction est la droite d'équation $2x + 3y$, qui est perpendiculaire à l'asymptote de Γ .

Par symétrie autour de l'axe des abscisses, on obtient le même résultat quand $t \rightarrow -\infty$.

Question II.9

II.9.a Les égalités $\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = 2\operatorname{ch}^2 t - 1 = 2\operatorname{sh}^2 t + 1$ découlent de $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$.

En outre $\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = (\frac{e^t + e^{-t}}{2})^2 + (\frac{e^t - e^{-t}}{2})^2 = 2\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{4} = \operatorname{ch} 2t$.

Puis $\operatorname{sh} 2t = e^{2t} - \operatorname{ch} 2t = (\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)^2 - (\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t) = 2\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t$.

II.9.b On calcule alors $\overrightarrow{OC'(t)} = 13 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \operatorname{ch}^2 t \operatorname{sh} t \\ -\operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch} t \end{pmatrix} = \frac{13}{2} \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t \begin{pmatrix} 3 \operatorname{ch} t \\ -2 \operatorname{sh} t \end{pmatrix}$, et sa norme vaut

$$\frac{13}{2} \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t \sqrt{9\operatorname{ch}^2 t + 4\operatorname{sh}^2 t} = \frac{13}{4} \operatorname{sh} 2t \sqrt{\frac{13\operatorname{ch} 2t + 5}{2}}.$$

La longueur demandée s'écrit alors :

$$\ell = \int_0^1 \frac{13}{4\sqrt{2}} \operatorname{sh} 2t \sqrt{13\operatorname{ch} 2t + 5} dt = \frac{1}{8\sqrt{2}} \int_{18}^{13\operatorname{ch} 2+5} \sqrt{u} du,$$

en posant $u = 13\operatorname{ch} 2t + 5$.

Finalement

$$\ell = \frac{1}{12\sqrt{2}} \left[u^{3/2} \right]_{18}^{13\operatorname{ch} 2+5} = \frac{(13\operatorname{ch} 2 + 5)^{3/2}}{12\sqrt{2}} - \frac{9}{2}.$$

Partie III — PARTIE C

Question III.1

En développant $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3) = X^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)X^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1)X - \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ on trouve que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -a$, $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = b$ et $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -c$.

Question III.2

Les asymptotes de $\mathcal{H}$ sont les axes de coordonnées. Pour trouver une équation réduite de $\mathcal{H}$, on fait tourner le repère de $\frac{\pi}{4}$, et si les nouvelles coordonnées sont (X, Y) , on dispose de $x = \frac{X - Y}{\sqrt{2}}$ et $y = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}$, de sorte que l'équation réduite de $\mathcal{H}$ s'écrit $\frac{X^2 - Y^2}{2} = 6$ ou encore $\frac{X^2}{12} - \frac{Y^2}{12} = 1$.

Avec les notations habituelles, $a = b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ donc $c = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ et l'excentricité de l'hyperbole est $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$.

Question III.3

$P(2, 3)$, donc $Q(-2, -3)$. O étant centre de symétrie de $\mathcal{H}$, si P est sur l'hyperbole, Q aussi.

Question III.4

La longueur PQ est le rayon du cercle demandée, elle vaut $\sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Une équation du cercle $\mathcal{C}$ est donc : $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 52 \iff x^2 + y^2 - 4x - 6y = 39$.

Question III.5

Il suffit de remplacer y par $6/x$ dans l'équation du cercle $\mathcal{C}$ pour obtenir l'équation aux abscisses demandée : $x^4 - 4x^3 - 39x^2 - 36x + 36 = 0$.

Question III.6

On sait que Q est à la fois sur $\mathcal{H}$ et sur $\mathcal{C}$: c'est dire que son abscisse, -2 , est racine du polynôme $x^4 - 4x^3 - 39x^2 - 36x + 36$, ou encore que celui-ci peut s'écrire sous la forme

$$x^4 - 4x^3 - 39x^2 - 36x + 36 = (x + 2)U(x).$$

En posant la division, on trouve que $U(x) = x^3 - 6x^2 - 27x + 18$.

Question III.7

On trouve $U(-2) = 40 > 0$ et $U(1) = -14 < 0$. En outre on a bien sûr $\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = +\infty$.

On en déduit que le polynôme admet une racine au moins dans $]-\infty, -2[$, une au moins dans $]-2, 1[$ et une encore au moins dans $]1, +\infty[$.

Mais U est de degré 3 et a donc au plus 3 racines. Finalement, U a 3 racines réelles deux à deux distinctes vérifiant $r_1 < -2 < r_2 < 1 < r_3$.

Question III.8

Finalement notre équation aux abscisses possède 4 racines : -2 (qui correspond au point Q), et r_1, r_2, r_3 , qui correspondent à trois points supplémentaires, deux à deux distincts, et distincts de Q .

Le point M_i a pour coordonnées $(r_i, 6/r_i)$ puisqu'il est sur l'hyperbole.

Question III.9

Les coordonnées du centre de gravité G du triangle $M_1M_2M_3$ sont $x_G = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$ et $y_G = \frac{2}{r_1} + \frac{2}{r_2} + \frac{2}{r_3}$.

On peut écrire $y_G = \frac{2}{r_1r_2r_3}(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)$, donc, en appliquant au polynôme U les résultats de la

question III.1, il vient $x_G = \frac{6}{3} = 2$ et $y_G = \frac{2}{-18} \times (-27) = 3$. On constate que $G = P$.

Or P est le centre du cercle $\mathcal{C}$ qui contient M_1, M_2 et M_3 : c'est donc aussi le point d'intersection des médiatrices du triangle.

Puisqu'il est en même temps centre de gravité de ce triangle, c'est que le triangle est équilatéral.

On a représenté la figure correspondante dans la page suivante.

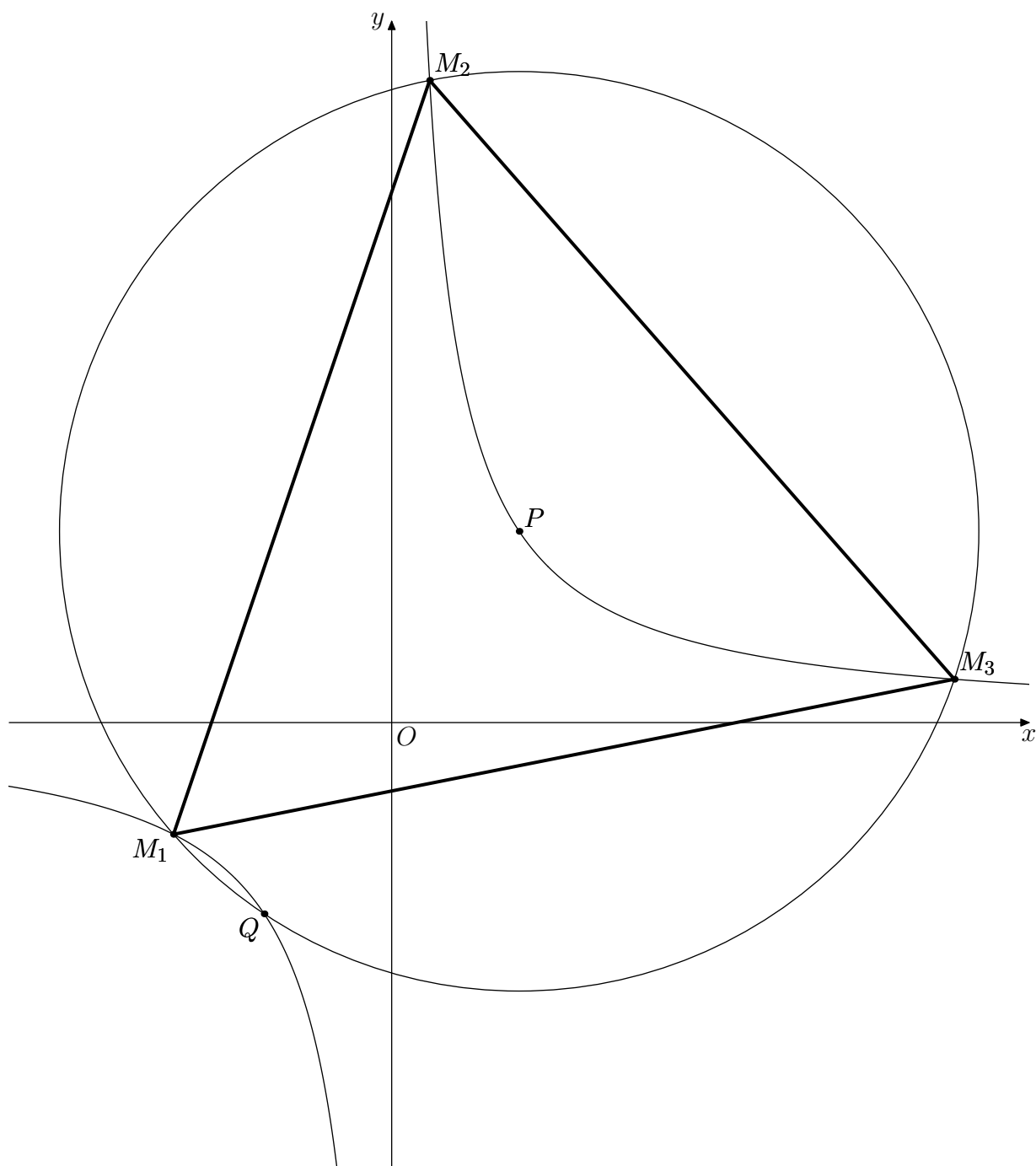


Figure 2 le cercle $\mathcal{C}$, l'hyperbole $\mathcal{H}$ et le triangle $M_1M_2M_3$