

I Généralités sur les nombres de Stirling

I.A. Premières propriétés des nombres de Stirling

I.A.1.

a) La seule décomposition de 3 en somme de deux entiers non nuls est $3 = 1 + 2$.

Ainsi, si E est de cardinal 3, toute partition de E en deux, comporte deux ensembles de cardinal respectif 1 et 2. Pour l'ensemble de cardinal 1, il existe $\binom{3}{1} = 3$ possibilités, l'ensemble de cardinal 2 est entièrement déterminé comme le complémentaire du premier dans E . On en déduit

$$S_{3,2} = 3$$

b) La seule partition de E en une partie est $\{E\}$.

$$S_{n,1} = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$

Il n'y a qu'une façon de faire une partition d'un ensemble de cardinal n en n sous-ensembles non vides : chaque sous-ensemble est un singleton (de cardinal 1) ; l'ordre de ces singletons n'ayant pas d'incidence, on a

$$S_{n,n} = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$

I.A.2.

a) i. La seule partition de E en deux parties, dont l'une est le singleton $\{4\}$ est :

$$\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$$

a) ii. Les partitions de E en deux, qui ne contiennent pas le singleton $\{4\}$, sont :

$$\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \quad \{\{2, 4\}, \{1, 3\}\} \quad \{\{3, 4\}, \{1, 2\}\}$$

$$\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\} \quad \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\} \quad \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\}$$

a) iii. Considérons une partition en deux parties de E . Soit elle contient le singleton $\{4\}$, soit elle ne le contient pas. Dénombrons séparément celles qui contiennent le singleton $\{4\}$ et les autres.

Si elle contient comme partie le singleton $\{4\}$, l'autre partie est nécessairement une partition en un seul élément de $E - \{4\}$. Le nombre de partitions de E en deux parties dont l'une est le singleton $\{4\}$ est donc $S_{3,1}$

Si elle ne contient pas le singleton $\{4\}$, on peut l'interpréter comme une partition en deux parties de $E - \{4\}$ à laquelle l'élément 4 a été ajouté dans l'une des deux parties. Réciproquement, chaque partition de $E - \{4\}$ en deux parties, fournit ainsi deux partitions de E en deux parties, qui sont des partitions non composées du singleton $\{4\}$. Ainsi, le nombre de partitions de E en deux parties ne comportant pas le singleton $\{4\}$ est le double du nombre de partitions de $E - \{4\}$ en deux parties, soit $2S_{3,2}$.

En résumé, on a montré

$$S_{4,2} = S_{3,1} + 2S_{3,2}$$

ce qui est bien un cas particulier de

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$$

b) i. Les partitions de E en k parties dont l'une est $\{x_n\}$ sont en bijection avec les partitions de $E - \{x_n\}$ en $k - 1$ parties. Elles ont donc même cardinal

$$\boxed{\text{Le nombre de partitions de } E \text{ en } k \text{ parties dont l'une est } \{x_n\} \text{ est } S_{n-1, k-1}}$$

b) ii. De toute partition de $E - \{x_n\}$ en k parties, on peut construire k partitions distinctes de E en k parties, il suffit d'ajouter x_n à l'une des k parties. On construit ainsi toutes les partitions de E en k parties qui ne comportent pas le singleton $\{x_n\}$

$$\boxed{\text{Le nombre de partitions de } E \text{ en } k \text{ parties dont aucune n'est } \{x_n\} \text{ est } kS_{n-1, k}}$$

b) iii. Soit une partition de E en k parties contient le singleton $\{x_n\}$, soit elle ne le contient pas. Le nombre de partitions de E en k parties est donc la somme du nombre de partitions de E en k parties qui contiennent $\{x_n\}$ et du nombre de partitions de E en k parties qui ne contiennent pas $\{x_n\}$:

$$\boxed{S_{n, k} = S_{n-1, k-1} + kS_{n-1, k} \quad \forall n \geq 2, \forall k \in \{1, \dots, n-1\}}$$

I.A.3.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $S_{n, n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$ pour $n \geq 2$.

Démontrons la par récurrence.

Pour $n = 2$, la propriété affirme $S_{2,1} = 1$, ce qui est cohérent avec le résultat de la question I.A.1.b.

Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie à un certain rang n et démontrons-la à l'ordre $n + 1$.

On a

$$\begin{aligned} S_{n+1, n} &= S_{n, n-1} + nS_{n, n} && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} + n \times 1 && \text{(d'après la question I.A.1.b et l'hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{n(n-1) + 2n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration.

$$\boxed{S_{n, n-1} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \forall n \geq 2}$$

I.A.4. En utilisant $S_{n, k} = S_{n-1, k-1} + kS_{n-1, k} \quad \forall n \geq 2, \forall k \in \{1, \dots, n-1\}$, dans le cas $n \geq 3$ et $k = 2$ (ce qui est compatible avec les conditions), on en déduit successivement :

$$S_{n, 2} = S_{n-1, 1} + 2S_{n-1, 2}$$

$$S_{n, 2} = 1 + 2S_{n-1, 2}$$

$$S_{n, 2} + 1 = 2 + 2S_{n-1, 2}$$

$$\boxed{S_{n, 2} + 1 = 2(S_{n-1, 2} + 1)}$$

Ainsi, la suite $(S_{n, 2} + 1)_{n \geq 2}$ est une suite géométrique de raison 2. On en déduit (puisque $S_{2, 2} = 1$)

$$S_{n, 2} + 1 = 2^{n-2}(S_{2, 2} + 1) = 2^{n-1}$$

$$\boxed{S_{n, 2} = 2^{n-1} - 1 \quad \forall n \geq 2}$$

I.A.5.

a) On suppose $n < k$. Soit f une application de E dans F . Le cardinal de $f(E)$ est inférieur ou égal à $\text{Card}(E) = n$, et donc l'image de E par f est de cardinal strictement plus petit que k . L'application f ne peut pas être surjective.

$$\sigma_{n,k} = 0 \quad \text{si } k < n$$

b) On suppose $n = k$. Toute application surjective est alors nécessairement bijective. Compter le nombre de surjections, c'est compter le nombre de bijections dont on sait qu'il est égal à $n!$

$$\sigma_{n,k} = n! \quad \text{si } k = n$$

c) Soit f une surjection de E dans F . On a $F = \{y_1, y_2\}$. Notons A_1 l'image réciproque de y_1 et A_2 celle de y_2 ; ce sont deux parties de E non vides puisque f est une surjection. De plus, $\{A_1, A_2\}$ est une partition de E . Toutefois, $\{A_2, A_1\}$ est la même partition de E mais correspond à une autre surjection de E dans F . Ainsi, à toute partition en deux parties de E correspond exactement deux surjections de E dans F . On en déduit

$$\sigma_{3,2} = 2S_{3,2} = 6$$

d) i. Montrons que $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ est une partition de E :

- Soit $i \in \{1, \dots, k\}$. L'ensemble A_i est une partie de E puisque c'est l'image réciproque par f d'une partie de F .
- Soit $i \in \{1, \dots, k\}$. L'ensemble A_i n'est pas vide puisque f est surjective.
- Soit $i, j \in \{1, \dots, k\}$ distincts. L'ensemble $A_i \cap A_j$ est vide car sinon un élément de cette intersection aurait à la fois pour image y_i et y_j ; ce qui est impossible car y_i et y_j sont supposés distincts.
- La réunion des A_i pour $i \in \{1, \dots, k\}$ est par construction $f^{-1}(F) = E$

$$\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\} \text{ est bien une partition de } E$$

d) ii. Soit $\mathcal{A}' = \{A'_1, \dots, A'_k\}$ une partition de E . Le nombre de surjections associées à cette partition est égal au nombre de bijections entre $\{A'_1, \dots, A'_k\}$ et F ; or le nombre de bijections entre deux ensembles de cardinal k est $k!$.

$$\text{Le nombre de surjections associées à } \mathcal{A}' \text{ est } k!$$

d) iii. On en déduit immédiatement

$$\sigma_{n,k} = k! S_{n,k}$$

I.A.6. Démontrons la propriété par récurrence sur n :

Pour $n = 0$, la seule valeur de k comprise entre 0 et n est 0. Comme $S_{0,0} = 1 \leq 0^0$, la propriété est vérifiée. Pour $n = 1$, les valeurs de k comprises entre 0 et 1 sont 0 et 1 et on vérifie que $S_{1,0} = 0 \leq 0^1$ et que $S_{1,1} = 1 \leq 1^1$.

Soit $n \geq 2$. Supposons la propriété vraie à l'ordre $n - 1$, avec k compris entre 0 et $n - 1$. On cherche à démontrer la propriété à l'ordre n , avec k compris entre 1 et n . Nous allons traiter d'abord le cas où k est compris entre 0 et $n - 1$, puis le cas où $k = n$.

Tout d'abord considérons k un entier compris entre 0 et $n - 1$. On a

$$\begin{aligned} S_{n,k} &= S_{n-1,k-1} + k S_{n-1,k} \\ &\leq (2(k-1))^{n-1} + k(2k)^{n-1} \\ &\leq 2^{n-1}[(k-1)^{n-1} + k^n] \\ &\leq 2^{n-1}[k^n + k^n] \\ &\leq (2k)^n \end{aligned}$$

Traitons maintenant le cas $k = n$. On a $S_{n,n} = 1 \leq (2n)^n$.

La propriété est donc vraie à l'ordre n pour toute valeur de k comprise entre 0 et k .

$$S_{n,k} \leq (2k)^n \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

I.B. Utilisation des nombres de Stirling en algèbre linéaire

I.B.1. La famille $\{P_0, \dots, P_N\}$ est une famille de $N+1$ polynômes à degré échelonné ;

$$\{P_0, \dots, P_N\} \text{ est une base de } \mathbf{R}_N[X]$$

I.B.2.

a) Soit $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$P_{k+1} = \prod_{j=0}^k (X-j) = (X-k) \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) = (X-k)P_k = XP_k - kP_k$$

On en déduit

$$XP_k = P_{k+1} + kP_k \quad \forall k \in \{0, \dots, N-1\}$$

b) Démontrons la propriété par récurrence.

Pour $n=0$, elle se traduit par $1=1$, donc elle est vérifiée.

Supposons-la vraie au rang $n-1$ (pour $n \geq 1$) : $X^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-1,k} P_k$

On a alors

$$\begin{aligned} X^n &= X X^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-1,k} X P_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-1,k} (P_{k+1} + kP_k) \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-1,k} P_{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-1,k} k P_k \\ &= \sum_{k=1}^n S_{n-1,k-1} P_k + \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-1,k} k P_k \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} (S_{n-1,k-1} + k S_{n-1,k}) P_k \right) + S_{n-1,n-1} P_n + S_{n-1,0} P_0 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} S_{n,k} P_k \right) + S_{n-1,n-1} P_n \quad (\text{d'après la question I.A.2.b)iii}) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} S_{n,k} P_k \right) + S_{n,n} P_n \quad (\text{puisque } S_{n-1,n-1} = S_{n,n} = 1) \\ &= \sum_{k=0}^n S_{n,k} P_k \end{aligned}$$

$$X^n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} P_k \quad \forall n \in \{0, \dots, N\}$$

I.B.3. La matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des éléments X^n de $\mathcal{B}_0$ dans la base $\mathcal{B}$. Or ces coordonnées sont précisés à la question précédente.

$$M = \begin{pmatrix} S_{0,0} & S_{1,0} & \dots & S_{N,0} \\ 0 & S_{1,1} & \dots & S_{N,1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & S_{N,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & S_{n,k} & S_{N,k} \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En particulier, M est une matrice triangulaire supérieure d'ordre $N+1$, dont le coefficient sur la ligne k et colonne n (pour $k, n \in \{0, \dots, N\}$) est égal à $S_{n,k}$ si $k \leq n$ et 0 si $k > n$.

Les coefficients sur la diagonales sont tous égaux à 1.

I.B.4.

a) La matrice M étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres se lisent sur la diagonales et on a

$$\boxed{\text{Le polynôme caractéristique de } M \text{ est } (X-1)^{N+1}}$$

b) Soit $N \geq 2$. M est une matrice d'ordre au moins 3 non diagonale (le coefficient sur la deuxième ligne, dernière colonne n'est pas nul, il vaut 1). Si on suppose que M est diagonalisable alors, M serait semblable à une matrice diagonale dont les coefficients sur la diagonale seraient les valeurs propres de M . La seule valeur propre de M étant 1, la matrice M serait semblable à la matrice identité. Or la matrice identité n'est semblable qu'à elle-même. Comme M n'est pas la matrice identité, elle ne peut pas être diagonalisable.

$$\boxed{\text{Si } N \geq 2, \text{ la matrice } M \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

Si $N = 1$, la matrice M est une matrice 2×2 diagonale, puisque c'est la matrice identité; elle est donc diagonalisable.

$$\boxed{\text{Si } N = 1, \text{ la matrice } M \text{ est diagonale}}$$

I.C. Un lien entre nombres de Stirling et loi de Poisson

I.C.1. Pour x non nul, posons $u_i = \frac{i^n}{i!} |x|^i$. La suite (u_i) est à termes strictement positifs, on peut utiliser le critère de d'Alembert.

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{u_{i+1}}{u_i} = \lim_{i \rightarrow +\infty} \left(\frac{i+1}{i} \right)^n \frac{|x|}{i+1} = 0$$

La série de terme général u_i est donc absolument convergente quelque soit la valeur de $x \neq 0$. Pour $x = 0$, la série converge clairement.

$$\boxed{\text{Le rayon de la série entière } \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i^n}{i!} x^i \text{ est } +\infty}$$

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } f_n \text{ est } \mathbf{R}}$$

I.C.2.

$$\begin{aligned} \bullet f_0(x) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i^0}{i!} x^i = e^x \\ \bullet f_1(x) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{i!} x^i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{i!} x^i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i-1)!} x^i = x \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i-1)!} x^{i-1} = x \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = x e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet f_2(x) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i^2}{i!} x^i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i^2}{i!} x^i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{(i-1)!} x^i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i-1+1}{(i-1)!} x^i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i-1}{(i-1)!} x^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i-1)!} x^i \\
&= \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i-1}{(i-1)!} x^i + x \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i-1)!} x^{i-1} = x^2 \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{(i-2)!} x^{i-2} + x \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i-1)!} x^{i-1} \\
&= x^2 e^x + x e^x = x(x+1)e^x
\end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} f_0(x) = e^x \\ f_1(x) = x e^x \\ f_2(x) = x(x+1) e^x \end{cases}$$

I.C.3. Il suffit de lire la définition de P_k

$$P_0(i) = 1 \quad \forall i \in \mathbf{N}$$

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, P_k(i) = \begin{cases} 0 & \forall i \in \{0, \dots, k-1\} \\ \frac{i!}{(i-k)!} & \forall i \geq k \end{cases}$$

I.C.4. Comme $X^n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} P_k$, $\forall n \in \{0, \dots, N\}$, il suffit de choisir N suffisamment grand (c'est-à-dire plus grand que n) et d'évaluer cette expression en $X = i$, on obtient

$$i^n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} P_k(i) \quad \forall i, n \in \mathbf{N}$$

I.C.5.

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i^n}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\sum_{k=0}^n S_{n,k} P_k(i)}{i!} x^i \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\sum_{k=0}^n S_{n,k} P_k(i)}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n S_{n,k} \frac{P_k(i)}{i!} x^i \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{+\infty} S_{n,k} \frac{P_k(i)}{i!} x^i
\end{aligned}$$

On a pu intervertir les deux symboles de sommation car le second porte sur un nombre fixe d'éléments.

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^{+\infty} S_{n,k} \frac{P_k(i)}{i!} x^i$$

Pour $k = 0$, $S_{n,0} = 0$ pour toute valeur de n . Ainsi $\sum_{i=0}^{+\infty} S_{n,0} \frac{P_0(i)}{i!} x^i = S_{n,0} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{(i-k)!}$ est une égalité triviale. Pour $k \neq 0$, on utilise les résultats de la question **I.C.3** et on obtient bien :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n S_{n,k} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{x^i}{(i-k)!}$$

On en déduit

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n S_{n,k} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{x^i}{(i-k)!} = \sum_{k=0}^n S_{n,k} x^k \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{x^{i-k}}{(i-k)!} = \sum_{k=0}^n S_{n,k} x^k \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$$

D'où

$$f_n(x) = e^x \sum_{k=0}^n S_{n,k} x^k$$

I.C.6. Comme Y suit une loi de Poisson de paramètre 1, on a $P(Y = i) = \frac{e^{-1}}{i!}$. L'espérance de Y^n existe si et seulement si la série $\sum_{i=0}^{+\infty} e^{-1} \frac{i^n}{i!}$ converge. Or cette expression n'est autre que $e^{-1} f_n(1)$ dont on sait qu'elle converge. On a donc $E(Y^n)$ existe et vaut

$$E(Y^n) = e^{-1} f_n(1) = \sum_{k=0}^n S_{n,k}$$

D'après le cours, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ ont toutes les deux pour valeur λ . De plus, d'après Huygens, $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. On en déduit

$$E(Y) = 1 \quad \text{et} \quad E(Y^2) = V(Y) + (E(Y))^2 = 2$$

Comparons ces valeurs avec celles obtenues en utilisant les nombres de Stirling

$$E(Y) = S_{1,0} + S_{1,1} = 0 + 1 = 1 \quad \text{et} \quad E(Y^2) = S_{2,0} + S_{2,1} + S_{2,2} = 0 + 1 + 1 = 2$$

Les résultats sont compatibles.

$$E(Y) = 1 \quad E(Y^2) = 2$$

I.D. Comportement asymptotique des nombres de Stirling

I.D.1

a) Posons $y(x) = \frac{1}{(k+1)!} (e^x - 1)^{k+1}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et on a alors :

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{(k+1)}{(k+1)!} (e^x - 1)^k e^x = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k e^x \\ &= \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k ((e^x - 1) + 1) = (k+1) \frac{1}{(k+1)!} (e^x - 1)^{k+1} + \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k \\ &= (k+1)y(x) + \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k \end{aligned}$$

$$x \mapsto \frac{1}{(k+1)!} (e^x - 1)^{k+1} \text{ est solution de } y' = (k+1)y(x) + \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k$$

b) L'équation différentielle homogène associée est à coefficients constants, ses solutions sont de la forme $y_h(x) = \lambda e^{(k+1)x}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$. La question précédente nous fournit une solution particulière de l'équation avec second membre.

On en déduit

$$\text{Les solutions de (I.1) sont les fonctions de la forme } x \mapsto \lambda e^{(k+1)x} + \frac{1}{(k+1)!} (e^x - 1)^{k+1} \text{ avec } \lambda \in \mathbf{R}$$

I.D.2

a) Posons $u_n = \frac{S_{n,k}}{n!} x^n$. Essayons de majorer $|u_n|$ par le terme général d'une série convergente. Comme $S_{n,k} \leq (2k)^n$, on a $|u_n| \leq \frac{(2k)^n}{n!} |x|^n$. Posons $v_n = \frac{(2k)^n}{n!} |x|^n$ c'est le terme général d'une série convergente dont on reconnaît la somme : $\sum_{n \geq 0} \frac{(2k)^n}{n!} |x|^n = e^{2k|x|}$. Ainsi, u_n est le terme général d'une série absolument convergente quelle que soit la valeur de x .

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq k} \frac{S_{n,k}}{n!} x^n$ est $+\infty$

b) Pour $k = 0$, on a $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{n \geq 0} \frac{S_{n,0}}{n!} x^n &= \sum_{n=0} \frac{S_{n,0}}{n!} x^n + \sum_{n>0} \frac{S_{n,0}}{n!} x^n = \frac{S_{0,0}}{0!} x^0 + \sum_{n>0} \frac{0}{n!} x^n = 1 \\ \bullet \frac{1}{0!} (e^x - 1)^0 &= 1 \end{aligned}$$

Ces deux quantités étant égales,

L'égalité (I.2) est vérifiée pour $k = 0$

c) Soit k un entier tel que (I.2) soit vérifiée.

Considérons d'abord le cas $k = 0$. Supposons $k = 0$ et posons $y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{n,1}}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x - 1$.

La fonction y_0 est bien solution de l'équation différentielle (I.1) :

$$y'_0(x) - y_0(x) = e^x - (e^x - 1) = 1 = \frac{1}{0!} (e^x - 1)^0$$

Dorénavant, on suppose $k \neq 0$. Posons $y_k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{n!} x^n$. D'après a), la série entière $x \mapsto y_k(x)$ est bien définie sur $\mathbf{R}$. D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, on a $y'_k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{(n-1)!} x^{n-1}$. Comme $k \neq 0$, on a donc $n \geq 2$. On peut donc la propriété démontrée en (I.A.2) de la façon suivante :

$$S_{n,k+1} = S_{n-1,k} + (k+1)S_{n-1,k+1} \quad \forall n \geq 2, \forall k \in \{0, \dots, n-2\}$$

(qui n'est donc valable que pour $n \geq k+2$; il faudra y faire attention).

Montrons que y_k est solution de l'équation différentielle (I.1) :

$$y'_k(x) - (k+1)y_k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{(n-1)!} x^{n-1} - (k+1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{n!} x^n$$

On va séparer la première somme en deux.

$$\begin{aligned} y'_k(x) - (k+1)y_k(x) &= \frac{S_{k+1,k+1}}{k!} x^k + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{(n-1)!} x^{n-1} - (k+1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{n!} x^n \\ &= \frac{x^k}{k!} + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{S_{n-1,k} + (k+1)S_{n-1,k+1}}{(n-1)!} x^{n-1} - (k+1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{n!} x^n \\ &= \frac{x^k}{k!} + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{S_{n-1,k}}{(n-1)!} x^{n-1} + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{(k+1)S_{n-1,k+1}}{(n-1)!} x^{n-1} - (k+1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{n!} x^n \end{aligned}$$

On change l'indexation de façon à faire apparaître x^n dans chaque somme

$$\begin{aligned}
 y'_k(x) - (k+1)y_k(x) &= \frac{x^k}{k!} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k}}{n!} x^n + (k+1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{n!} x^n - (k+1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{n!} x^n \\
 &= \frac{x^k}{k!} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k}}{n!} x^n \\
 &= \frac{S_{k,k}}{k!} x^k + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k}}{n!} x^n \\
 &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{S_{n,k}}{n!} x^n \\
 &= \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k \quad (\text{par hypothèse sur } k)
 \end{aligned}$$

Nous avons montré :

Pour $k \in \mathbf{N}$ tel que la proposition (I.2) est vraie, $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{n!} x^n$ est une solution de l'équation différentielle (I.1)

d) Démontrons la proposition (I.2) par récurrence sur k .

Elle est vraie à l'ordre $k = 0$ d'après **b**).

Supposons qu'il existe k tel qu'elle soit vraie. Alors, d'après **c**) $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{n!} x^n$ est une solution de l'équation différentielle (I.1). Or toute solution de (I.1) s'écrit $\lambda e^{(k+1)x} + \frac{1}{(k+1)!} (e^x - 1)^{k+1}$ d'après **I.D.1.b**).

Il existe donc $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{n!} x^n = \lambda e^{(k+1)x} + \frac{1}{(k+1)!} (e^x - 1)^{k+1}$. Calculons la valeur de λ en évaluant les deux membres de l'égalité en $x = 0$. On en déduit $\lambda = 0$ et donc

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{n!} x^n = \frac{1}{(k+1)!} (e^x - 1)^{k+1}$$

Autrement dit, la proposition (I.2) est vérifiée à l'ordre $k+1$. On l'a ainsi démontrée par récurrence.

$$\forall k \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R} \quad \sum_{n=k}^{\infty} \frac{S_{n,k}}{n!} x^n = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k$$

I.D.3

Soit k un entier. Nous avons les égalités successives suivantes :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{S_{n,k}}{n!} x^n &= \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k \\
 \sum_{n=k}^{\infty} S_{n,k} \frac{x^n}{n!} &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} e^{jx} (-1)^{k-j}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} S_{n,k} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(jx)^n}{n!}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} S_{n,k} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^n \right) \frac{x^n}{n!}$$

Deux séries entières sont égales si et seulement si elle ont même coefficients. On en déduit, en particulier

$$\forall n \geq k, \quad S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^n$$

En conclusion,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^n$$

I.D.4

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{n,k}}{k^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \frac{j^n}{k^n} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{j^n}{k^n}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{j}{k} \right)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in \{0, \dots, k-1\} \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}. \text{ D'où,}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{n,k}}{k^n} = \frac{1}{k!} \binom{k}{k} (-1)^{k-k} = \frac{1}{k!}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{n,k}}{k^n} = \frac{1}{k!}$$

On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{n,k}}{\frac{k^n}{k!}} = 1$ et donc un équivalent de $S_{n,k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$S_{n,k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^n}{k!}$$

II Nombres de Stirling et problème du collectionneur

II. A. Équivalent de $E(k)$ lorsque $k \rightarrow +\infty$

II.A.1 Le nombre minimum d'achats nécessaires pour obtenir une vignette de la collection est évidemment 1. On en déduit que la loi de la variable aléatoire X_1 est :

$$\forall \ell \in \mathbf{N} \quad P(X_1 = \ell) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = 1 \\ 0 & \text{si } \ell \neq 1 \end{cases}$$

L'espérance s'interprétant comme la valeur moyenne, on a alors

$$E(X_1) = 1$$

II.A.2 Un collectionneur possédant déjà i vignettes, lorsqu'il achète une tablette supplémentaire, a une probabilité $\frac{i}{k}$ de tomber sur une vignette qu'il possède déjà et une probabilité $\frac{k-i}{k}$ de tomber sur une vignette qu'il ne possède pas. Pour qu'il obtienne une nouvelle vignette au bout du ℓ achats, c'est que sur

les $\ell - 1$ premiers achats, il a obtenu des vignettes qu'il possédait déjà et qu'au ℓ -ième achat, il en a eu une nouvelle ; autrement dit, la loi de Z_i est la suivante :

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \forall \ell \in \mathbf{N}^*, \quad P(Z_i = \ell) = \left(\frac{i}{k}\right)^{\ell-1} \left(\frac{k-i}{k}\right)$$

$$\boxed{\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad Z_i \text{ suit une loi géométrique de paramètre } \frac{k-i}{k}}$$

On en déduit son espérance (puisque l'espérance d'une loi géométrique de paramètre p est $1/p$) :

$$\boxed{\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad E(Z_i) = \frac{k}{k-i}}$$

II.A.3 Soit i compris entre 1 et $k-1$. Pour obtenir $i+1$ vignettes différentes, il faut commencer par obtenir i vignettes différentes, et une fois ces i vignettes obtenues, il faut en obtenir une que l'on ne possède pas déjà. Ainsi,

$$X_{i+1} = X_i + Z_i$$

De cette égalité, on déduit

$$\boxed{\forall i \in \{1, \dots, k-1\}, \quad X_{i+1} - X_i = Z_i}$$

II.A.4 Partons de l'expression de droite de l'égalité pour arriver à montrer qu'elle est égale à son expression de gauche :

$$\begin{aligned} X_1 + \sum_{i=1}^{k-1} (X_{i+1} - X_i) &= X_1 + \sum_{i=1}^{k-1} X_{i+1} - \sum_{i=1}^{k-1} X_i \\ &= X_1 + \sum_{i=2}^k X_i - \sum_{i=1}^{k-1} X_i \\ &= X_1 + X_k - X_1 \\ &= X_k \end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{X_k = X_1 + \sum_{i=1}^{k-1} (X_{i+1} - X_i)}$$

Passons à l'espérance ; l'espérance étant un opérateur linéaire, on en déduit

$$\boxed{E(X_k) = E(X_1) + \sum_{i=1}^{k-1} (E(X_{i+1}) - E(X_i)) = E(X_1) + \sum_{i=1}^{k-1} E(Z_i)}$$

II.A.5

a) Cherchons un équivalent de $u_n - u_{n-1}$ lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned}
 u_n - u_{n-1} &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) - \ln n - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \right) + \ln(n-1) \\
 &= \frac{1}{n} + \ln \left(\frac{n-1}{n} \right) \\
 &= \frac{1}{n} + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\
 &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right)
 \end{aligned}$$

Un équivalent de $u_n - u_{n-1}$ en $+\infty$ est donc $\frac{1}{2n^2}$. En particulier, au voisinage de $+\infty$, le terme $u_n - u_{n-1}$ garde un signe strictement positif. On peut donc utiliser les théorèmes de comparaison pour les séries numériques.

La série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ est une série de Riemann convergente. Deux séries positives, ayant des termes équivalents, sont de même nature. On en déduit

La série de terme $u_n - u_{n-1}$ est convergente.

La série étant convergente, sa somme partielle a une limite. Or par télescopage, on a

$$\sum_{n=2}^N (u_n - u_{n-1}) = u_N - u_1 = u_N$$

La limite de la suite (u_n) , lorsque n tend vers $+\infty$, existe et est égale à la somme de la série de terme $u_n - u_{n-1}$. Ainsi,

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente

b) Reprenons le résultat de la question **II.A.4** :

$$\begin{aligned}
 E(X_k) &= E(X_1) + \sum_{i=1}^{k-1} E(Z_i) \\
 &= 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{k}{k-i} \quad (\text{d'après II.A.2}) \\
 &= 1 + k \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{k-i} \\
 &= 1 + k \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \quad (\text{réindexation de la somme dans le sens inverse}) \\
 &= 1 + k(u_{k-1} + \ln(k-1)) \\
 &= 1 + k(u_{k-1}) + k \ln(k-1) \\
 &= 1 + k(u_{k-1}) + k \ln \left(\binom{k}{1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \right) \\
 &= 1 + k(u_{k-1}) + k \ln(k) + k \ln \left(1 - \frac{1}{k}\right)
 \end{aligned}$$

Comme la suite (u_n) est convergente, u_{k-1} est négligeable devant $\ln(k-1)$ lorsque k tend vers $+\infty$. De plus, un équivalent de $k \ln(1 - \frac{1}{k})$ est -1 qui est lui-même négligeable devant $k \ln k$. On en déduit finalement,

$$E(X_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} k \ln(k)$$

Interprétation :

Pour k assez grand, le nombre d'achats en moyenne pour compléter la collection est de l'ordre de $k \ln k$

II. B. Équivalent de $P(X_k = n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

II.B.1 Le collectionneur ne peut pas obtenir k vignettes différentes en moins de k achats. Ainsi,

$$\forall n \in \{1, \dots, k-1\}, \quad P(X_k = n) = 0$$

II.B.2 Calculons $P(X_k = n)$ en dénombrant le nombre de cas favorables sur le nombre de cas total. Comme il y a eu n tirages, et qu'il existe k vignettes possibles, le nombre de cas total est k^n (on compte avec ordre).

Dénombrons le nombre de cas favorables : Numérotions les vignettes de 1 à k . Notons A_i la sous-partie de $\{1, \dots, n\}$ correspondant à tous les tirages où le collectionneur a obtenu la vignette numéro i . Supposons que le collectionneur parvienne au n -ième achat à compléter sa collection. Alors, Les A_i forment une partition en exactement k parties de $\{1, \dots, n\}$. Dans cette partition il existe un singleton particulier, celui lié au dernier tirage. Notons ℓ le numéro de la vignette du dernier tirage. Il existe k choix possible pour ℓ . Par ailleurs, Les $\{A_i\}_{i \neq \ell}$ forment une partition en $k-1$ parties d'un ensemble de $n-1$ éléments ; il existe exactement $S_{n-1, k-1}$ telles partitions possibles. Chacune de ces partitions est obtenu pour exactement $(k-1)!$ cas favorables : car à chaque A_i de la partition peut correspondre n'importe quel numéro de vignette autre que ℓ : pour A_1 on a $(k-1)$ choix (tous sauf ℓ), pour A_2 , on a $(k-2)$ choix (tous sauf ℓ et le premier choix), etc... On en déduit que le nombre de cas favorables est $k(k-1)!S_{n-1, k-1}$. On a finalement,

$$P(X_k = n) = \frac{k(k-1)!S_{n-1, k-1}}{k^n}$$

II.B.3 En utilisant le résultat de la question **I.D.4** : $S_{n, k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^n}{k!}$, on en déduit

$$\begin{aligned} P(X_k = n) &= \frac{k(k-1)!S_{n-1, k-1}}{k^n} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k(k-1)!(k-1)^{n-1}}{k^n(k-1)!} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(k-1)^{n-1}}{k^{n-1}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$P(X_k = n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{n-1}$$