

Centrale 2005 – Corrigé

Les deux parties sont indépendantes.

I. Polygones simples

Dans toute cette partie, le plan est muni d'un repère orthonormé fixé. On identifiera un vecteur et le couple de ses coordonnées dans ce repère.

Notes de programmation

On dispose des types suivants :

```
type point = {x : int ; y : int} ;
type vecteur = { xv : int ; yv : int } ;
type segment = { a : point ; b : point } ;
type polygone == point list ;;
```

Dans tout le problème, un segment (resp. un polygone) est toujours supposé formé de points distincts.

On dispose par ailleurs de constructeurs de vecteurs et de segments à partir de points en les définissant :

```
let creer_vecteur p q = {
  xv = q.x - p.x ;
  yv = q.y - p.y
} ;;
```

```
let creer_segment p q = {
  a = p ;
  b = q
} ;;
```

1. Intersection

Remarque Géométriquement, le segment $[a, b]$ est l'ensemble des points de la droite (a, b) situés entre a et b ; et on rappelle que les segments considérés sont non réduits à un point.

Question 1 Écrire des fonctions « `determinant` » et « `produit_scalaire` » telles que « `determinant u v` » retourne le déterminant de la matrice formée par les vecteurs

colonnes représentés par « `u` » et « `v` », et « `produit_scalaire u v` » retourne le produit scalaire de ces vecteurs.

Définition Étant donné trois points a, b et c , le triangle (a, b, c) est dit *direct* (resp. *indirect*, resp. *aplati*) si une mesure de l'angle (\vec{ab}, \vec{ac}) est dans l'intervalle $]0, \pi[$ (resp. dans l'intervalle $] - \pi, 0[$, resp. égale à 0).

Question 2 Montrer que le triangle (a, b, c) est direct si, et seulement si, $\det(\vec{ab}, \vec{ac}) > 0$.

Question 3 Écrire une fonction « `direct` » telle que « `direct a b c` » retourne « `1` » si le triangle (a, b, c) est direct, « `0` » s'il est aplati et « `-1` » s'il est indirect.

Question 4 Écrire une fonction « `meme_cote` » telle que « `meme_cote I p q` » retourne « `1` » si les points p et q sont du même côté de la droite D portée par le segment I , « `-1` » s'ils ne sont pas sur le même côté et « `0` » si p ou q est sur D .

On illustrera la démarche suivie à l'aide de figures bien choisies.

Question 5 Écrire, *en la justifiant*, une fonction « `appartient` » telle que « `appartient I p` » retourne « `true` » si le point p appartient au segment I , et « `false` » sinon.

Question 6 Écrire une fonction « `intersecte` » telle que « `intersecte I J` » retourne « `true` » si les segments I et J ont une intersection non vide, et « `false` » sinon.

Utiliser et justifier à l'aide de figures le fait que, sauf cas particuliers à expliciter, I et J ont une intersection non vide lorsque les extrémités I et J ne sont pas du même côté de J et que conjointement les extrémités de J ne sont pas du même côté de I.

2. Intérieur et extérieur

Dans cette partie, n est un entier strictement supérieur à 2, $P = p_1 p_2 \dots p_n$ est un polygone. Les points p_1, p_2, \dots, p_n sont les sommets du polygone ; les segments $[p_1, p_2], \dots, [p_{n-1}, p_n], [p_n, p_1]$ en sont les arêtes. Par convention, on pose $p_0 = p_n$ et $p_{i+kn} = p_i$ pour tout entier naturel k .

Géométriquement, un polygone est, par définition, l'ensemble des points de ses arêtes ; ainsi on dit qu'un point a est sur le polygone P s'il appartient à l'une de ses arêtes. On dit qu'un segment S coupe le polygone P si ce segment a une intersection non vide avec l'une des arêtes de P .

De plus, dans ce problème, le polygone P sera toujours supposé *simple*, ce qui signifie que deux arêtes quelconques non consécutives sont toujours disjointes et que deux arêtes consécutives ont un seul point commun.

Résultats admis

1. Un polygone simple P sépare le plan en deux composantes connexes, ce qui signifie que le complémentaire de P dans le plan comporte deux composantes

connexes : l'intérieur de P est par définition la composante connexe bornée et l'autre, non bornée, est l'extérieur de P .

2. Soit P un polygone simple, a et b deux points du plan qui ne sont pas sur P . Si le segment $[a, b]$ ne coupe pas P alors a et b sont dans la même composante connexe.
3. Soient P un polygone simple, a et b deux points du plan qui ne sont pas sur P . Si le segment $[a, b]$ coupe P en un seul point qui n'est pas un sommet de P , alors a et b ne sont pas dans la même composante connexe.

Question 7 Écrire une fonction « simplifie » telle que « simplifie p » supprime du polygone « p » les points p_i tels que p_{i-1} , p_i et p_{i+1} sont alignés. Évaluer sa complexité.

Dans la suite, le polygone P sera supposé sous sa forme simplifiée, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de sommet p_i tel que les points p_{i-1} , p_i et p_{i+1} sont alignés.

Question 8 Écrire une fonction « en_dehors » telle que « en_dehors P » retourne un point appartenant à la composante extérieure de P . Le temps d'exécution doit être linéaire en le nombre de points de P .

Question 9 Soit s un point extérieur de P . En supposant que le segment $[q, s]$ ne contient aucun des sommets de P , dire dans quelle composante connexe se situe q , en fonction du nombre d'intersections de $[q, s]$ avec P .

Question 10 En déduire une fonction « interieur » telle que « interieur P q » renvoie « 1 » si q est dans la composante intérieure de P , et « -1 » si q est dans la composante extérieure de P , et « 0 » si q est sur P . Le nombre d'opérations (dans le pire des cas) de la fonction doit être linéaire en le nombre de sommets de P .

On fera ici l'hypothèse que le point s à l'extérieur de P est tel qu'aucun sommet de P n'est sur le segment $[q, s]$.

Question 11 Adapter cette fonction pour traiter tous les cas d'intersections possibles et donner alors le nombre d'opérations (dans le pire des cas).

Indication : on déplacera habilement le point extérieur s .

Question 12 Soient deux points a et b qui ne sont pas sur P et tels que $[a, b]$ coupe P en un seul point qui est l'un de ses sommets p_i . Caractériser, par une condition portant sur p_{i-1} , p_{i+1} et $[a, b]$, l'appartenance des points a et b à la même composante connexe. Justifier à l'aide de figures bien choisies.

Question 13 Soient deux points a et b qui ne sont pas sur P et tels que l'intersection de $[a, b]$ et de P est une arête $[p_i, p_{i+1}]$. Caractériser, par une condition portant sur p_{i-1} , p_{i+2} et $[a, b]$, l'appartenance des points a et b à la même composante connexe. Justifier à l'aide de figures bien choisies.

Question 14 Réécrire la fonction « interieur » précédente afin que le nombre d'opé-

rations utilisées soit, dans le pire des cas, linéaire par rapport à n .

II. Complexité de communication

Lorsque E est un ensemble fini, $|E|$ désigne son cardinal. Lorsque x est un réel, $\lceil x \rceil$ (resp. $\lfloor x \rfloor$) désigne sa partie entière supérieure (resp. inférieure), c'est-à-dire l'unique entier vérifiant $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$ (resp. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$).

Soit une application $f : X \times Y \rightarrow Z$. Pour un $y \in Y$ fixé, f^y désigne l'application partielle de X dans Z définie par $f^y(x) = f(x, y)$. De même, pour $x \in X$, on définit l'application f_x de Y dans Z définie par $f_x(y) = f(x, y)$.

1. Communication à sens unique

Dans cette partie, on modélise le scénario suivant. Soient X , Y et Z trois ensembles finis arbitraires, et $f : X \times Y \rightarrow Z$ une fonction donnée. Deux personnes, Alice et Bob, veulent calculer $f(x, y)$ pour des valeurs $x \in X$ et $y \in Y$. La difficulté est que seule Alice connaît x et seul Bob connaît y . L'objectif est de déterminer l'information minimale qu'Alice doit envoyer à Bob pour que ce dernier puisse calculer $f(x, y)$.

Un protocole à sens unique \mathcal{P} calculant f est un couple de fonctions (g_0, g_1) avec des fonctions $g_0 : X \rightarrow \{0, 1\}^*$ et $g_1 : \{0, 1\}^* \times Y \rightarrow Z$ vérifiant :

$$f(x, y) = g_1(g_0(x), y)$$

pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, $\{0, 1\}^*$ désignant l'ensemble des mots sur $\{0, 1\}$.

Autrement dit, $g_0(x)$ est l'information qu'Alice envoie à Bob, et $g_1(m, y)$ est la valeur calculée par Bob après avoir reçu le message m d'Alice.

Le coût sur l'entrée (x, y) d'un protocole à sens unique \mathcal{P} est la taille en bits de $g_0(x)$, c'est-à-dire la longueur de ce mot. Le coût d'un protocole à sens unique est le maximum de ses coûts sur toutes les entrées possibles. La complexité de communication à sens unique de f , notée $D^1(f)$, est le minimum des coûts des protocoles à sens unique calculant f .

Note sur la rédaction Dans cette partie, la description d'un protocole se fera par la donnée explicite des fonctions g_0 et g_1 correspondantes.

1.1. Exemples, propriétés simples

Question 15 Calculer $D^1(f)$ lorsque f est une fonction constante.

Question 16 Trouver, pour f donnée, un protocole dont le coût est $\lceil \log_2 |X| \rceil$. Que peut-on en déduire sur $D^1(f)$?

Question 17 Soient $X = \llbracket 1, n \rrbracket$ pour $n \in \mathbf{N}^*$, p un entier tel que $1 \leq p \leq n - 1$ et f une fonction de période p par rapport à la première variable, c'est-à-dire que $f(x + p, y) =$

$f(x, y)$ pour tout couple $(x, y) \in X \times Y$ tel que $x + p \leq n$. Montrer que $D^1(f) \leq \lceil \log_2 p \rceil$.

Question 18 Ici, X et Y désignent l'ensemble des parties non vides de $\llbracket 1, n \rrbracket$ pour un entier $n \in \mathbf{N}^*$ donné et, pour $(x, y) \in X \times Y$, $f(x, y)$ est le plus grand élément de $x \cup y$. Montrer que $D^1(f) \leq \lceil \log_2 n \rceil$. Comparer ce résultat à la majoration de la question 16.

Question 19 Montrer que pour chaque $y \in Y$ fixé, $D^1(f) \geq \lceil \log_2 (|\text{Im } f^y| + 1) \rceil - 1$ avec $\text{Im } f^y$ désignant l'ensemble des valeurs prises par f^y .

Question 20 Calculer $D^1(f)$ pour la fonction f de la question 18.

1.2. Calcul exact de $D^1(f)$

On suppose que $X = \llbracket 1, p \rrbracket$ et $Y = \llbracket 1, q \rrbracket$ pour deux entiers p et q strictement positifs. La matrice de communication de $f : X \times Y \rightarrow Z$ est un tableau à p lignes et q colonnes, notée M_f , dont les lignes sont indexées par X et les colonnes par Y , et définie par $(M_f)_{x,y} = f(x, y)$ pour $(x, y) \in X \times Y$. Soit t le nombre de lignes distinctes de M_f . On va montrer l'égalité $D^1(f) = \lceil \log_2(t + 1) \rceil - 1$.

Question 21 Donner un protocole calculant f dont le coût est $\lceil \log_2(t + 1) \rceil - 1$.

Question 22 Montrer que le protocole précédent est optimal, c'est-à-dire que tout protocole calculant f a un coût supérieur ou égal à $\lceil \log_2(t + 1) \rceil - 1$.

Question 23 Application Alice et Bob détiennent chacun un mot de taille n sur l'alphabet $\{0, 1\}$. Quelle information minimale Alice doit-elle fournir à Bob pour que celui-ci puisse décider de façon certaine si les deux mots sont égaux?

On commencera par modéliser précisément cette situation en terme de protocole de communication à sens unique.

Donner un protocole à sens unique dont le coût atteint cette borne.

2. Communication avec aller-retour

Nous considérons maintenant des communications générales où les deux participants peuvent interagir plusieurs fois entre eux. De plus, ils veulent maintenant calculer *tous les deux* la valeurs de la fonction. Soient X , Y et Z trois ensembles finis arbitraires et $f : X \times Y \rightarrow Z$ une fonction donnée. Étant donnés $x \in X$, détenu par Alice, et $y \in Y$ détenu par Bob, le but est de calculer $f(x, y)$ en échangeant le minimum de bits. Un protocole calculant f est maintenant divisé en étapes. À chaque étape, le protocole désigne une personne, indifféremment Alice ou Bob. La personne désignée envoie alors un bit à l'autre personne. Ce bit ne dépend que des bits échangés précédemment et de l'entrée détenue par la personne désignée. Lorsque le protocole termine, alors les deux participants sont en mesure de calculer $f(x, y)$ d'après les bits échangés et la valeur de x (respectivement de y).

Plus formellement, un protocole \mathcal{P} de domaine $X \times Y$ et à valeurs dans Z est un arbre binaire étiqueté comme suit. Chaque nœud interne est étiqueté soit « Alice », soit « Bob », chaque feuille est étiquetée par un élément $z \in Z$. Enfin, les arêtes sont étiquetées par des sous-ensembles X et Y avec la contrainte suivante : si un nœud interne est étiqueté « Alice » (resp. « Bob ») le parcours suit le fils gauche si $x \in E_g$ (resp. $y \in E_g$) et le fils droit dans l'autre cas, i.e. si $x \in E_d$ (resp. $y \in E_d$). Pour indiquer le sens du parcours, Alice (resp. Bob) envoie à Bob (resp. à Alice) le bit 0 pour le fils gauche et 1 pour le fils droit si $x \in E_d$ (resp. si $y \in E_d$). Le protocole sera toujours supposé bien défini, de sorte qu'à chaque nœud, x (ou y selon le cas), appartient à $E_g \cup E_d$.

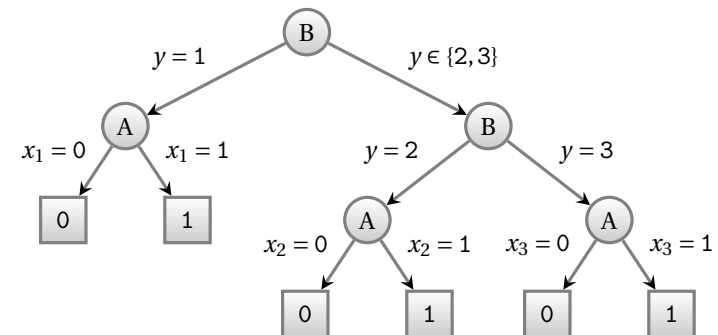
Le *coût sur l'entrée* (x, y) d'un protocole \mathcal{P} est la longueur totale du chemin sur l'entrée (x, y) , soit donc la profondeur de la feuille atteinte.

Le *coût* d'un protocole est le maximum de ses coûts sur toutes les entrées possibles, soit encore la hauteur de l'arbre \mathcal{P} .

Un protocole calcule f si sa valeur est $f(x, y)$ sur chaque entrée (x, y) .

La *complexité de communication* de f , notée $D(f)$, est le minimum des coûts des protocoles calculant f .

Exemple Soient $X = \{0, 1\}^3$, $Y = \{1, 2, 3\}$ et $Z = \{0, 1\}$. Posons $f((x_1, x_2, x_3), y) = x_y$. Voici un protocole pour f :



2.1. Quelques exemples

Question 24 Voici la description d'un protocole avec $X = Y = Z = \{0, 1, 2, 3\}$:

1. Alice calcule $a = 0$ si $x \in \{0, 1\}$ et $a = 1$ sinon.
Alice envoie a à Bob.
2. Si $a = 0$ et si $y \in \{2, 3\}$, Bob renvoie $b = 1$.
Si $a = 0$ et si $y \in \{0, 1\}$, Bob renvoie $b = 0$.
Si $a = 1$ et si $y \in \{0, 1\}$, Bob renvoie $b = 0$.
Si $a = 1$ et si $y \in \{2, 3\}$, Bob renvoie $b = 0$.
3. Si $b = 1$, le protocole termine et renvoie $f(x, y) = 1 - a$.
Sinon, Alice renvoie $c = x - 2a$.
4. Bob renvoie $d = 1$ si $c < y - 2a$, et $d = 0$ sinon.
5. Le protocole termine et renvoie $f(x, y) = d$.

Représenter l'arbre binaire associé à ce protocole, préciser la fonction f calculée par le protocole et donner le coût du protocole.

Question 25 On pose $X = \{0, 1\}^n$, $Y = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $Z = \{0, 1\}$ et on définit $f(x, y) = x_{y_y}$, où x_{y_y} représente de y -ième bit de x . Montrer l'inégalité $D(f) \leq \lceil \log_2 n \rceil + 1$.

Question 26 Pour les ensembles $X = \llbracket 1, n \rrbracket \times \{0, 1\}^n$, $Y = \llbracket 1, n \rrbracket^n$ et $Z = \{0, 1\}$, on définit $f((x, u), y) = u_i$ où $i = y_x$. Montrer l'inégalité $D(f) \leq 2 \lceil \log_2 n \rceil + 1$.

2.2. Comparaison avec la communication à sens unique

Le but des questions suivantes est de montrer l'inégalité suivante et son optimalité :

$$\lceil \log_2 D^1(f) \rceil + 1 \leq D(f) \leq D^1(f) + \lceil \log_2 |\text{Im } f| \rceil$$

Question 27 Montrer l'inégalité $D(f) \leq D^1(f) + \lceil \log_2 |\text{Im } f| \rceil$.

Question 28 Montrer l'inégalité $D(f) \geq \lceil \log_2 |\text{Im } f| \rceil$ et construire une fonction $f_0 : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ satisfaisant $D(f_0) = D^1(f_0) + \lceil \log_2 |\text{Im } f_0| \rceil$.

Question 29 Montrer l'inégalité $D^1(f) \leq 2^{D(f)} - 1$ et en déduire que l'on a :

$$\lceil \log_2 D^1(f) \rceil + 1 \leq D(f)$$

Question 30 Montrer que la fonction de la question 25 satisfait (pour un n bien choisi mais arbitrairement grand) l'égalité $\lceil \log_2 D^1(f) \rceil + 1 = D(f)$.