MATHÉMATIQUES

– une proposition de correction –

EXERCICE 1 – Étude d'un endomorphisme matriciel

Partie I – Généralités

Q1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Puisque le produit de deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est bien défini, et est dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, φ_A est correctement définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

De plus, pour tout $(M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ et pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$:

$$\varphi_A(\lambda M + \mu N) = A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN = \lambda\varphi_A(M) + \mu\varphi_A(N)$$

φ est donc une application linéaire définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, donc un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Q2. Pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\varphi_A \circ \varphi_B(M) = \varphi_A(\varphi_B(M)) = \varphi_A(BM) = A(BM) = (AB)M = \varphi_{AB}(M),$$

et donc $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.

Q3. - -→ Si A est inversible, alors, d'après **Q2.**, $\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_{\mathrm{I}_n} = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$, et, de même, $\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$.

Par conséquent, φ_A est bijective, et sa réciproque est $\varphi_{A^{-1}}$.

- -→ Réciproquement, supposons $\varphi_A : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ bijective.

En particulier, la matrice I_n possède un unique antécédent par φ_A : il existe une unique matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\varphi_A(B) = \mathrm{I}_n$. Cette dernière égalité se récrit $AB = \mathrm{I}_n$, ce qui justifie que A est inversible (et que B est son inverse).

Partie II – Étude d'un exemple

Q4. $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 0 & X-a \end{vmatrix} = (X-1)(X-a)$, donc deux situations se présentent :

- -→ si $a \neq 1$, alors A possède exactement deux valeurs propres distinctes (à savoir a et 1), et puisque $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, A est diagonalisable ;
- -→ si $a = 1$, alors A possède 1 pour unique valeur propre, et si A était diagonalisable, alors il existerait $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $A = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times P^{-1} = PP^{-1} = \mathrm{I}_2$.

  Puisque $A \neq \mathrm{I}_2$, cette conclusion est fausse, et A ne peut donc pas être diagonalisable lorsque $a = 1$.

Par conséquent, A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 1$.

Q5. On calcule les images des éléments de $\mathcal{C}$ par φ :

$$\begin{cases} \varphi_A\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \varphi_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \varphi_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \\ \varphi_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \end{cases}$$

et on en déduit que $\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Q6. Puisque la matrice précédente est triangulaire supérieure, on montre rapidement que $\chi_{\varphi_A} = (X-1)^2(X-a)^2$, et donc $\mathrm{Sp}(\varphi_A) = \{1, a\}$.

De plus, $\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\varphi_A - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$ est de rang 2 (quelle que soit la valeur de a), donc, par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})})) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{C})) - \mathrm{rg}(\varphi_A - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})}) = 2$.

De même, $\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\varphi_A - a\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})}) = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2, donc $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A - a\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})})) = 2$.

Q7. ⇢ Si $a \neq 1$, φ_A possède deux valeurs propres distinctes, à savoir 1 et a, et puisque $\dim(E_1(\varphi_A)) + \dim(E_a(\varphi_A)) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{C}))$, φ_A est diagonalisable.

⇢ Si $a = 1$, alors φ_A possède 1 pour unique valeur propre, et comme $\dim(E_1(\varphi_A)) = 2 \neq 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{C}))$, φ_A n'est pas diagonalisable.

Finalement, φ_A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 1$.

Partie III – Réduction de φ_A si A est diagonalisable

Q8. On a vu en **Q2.** que, pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.
En particulier, $\varphi_A^2 = \varphi_{A^2}$.
On en déduit rapidement, par récurrence, que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_A^k = \varphi_{A^k}$.
Par ailleurs, $\varphi_{A^0} = \varphi_{\mathrm{I}_n} = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})} = \varphi_A^0$: l'égalité ci-dessus demeure donc vraie lorsque $k = 0$.

Q9. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$: il existe $d \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$ tels que $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$.

Pour toute $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\underbrace{[P(\varphi_A)](M) = \left[\sum_{k=0}^{d} a_k \varphi_A^k\right](M) = \left[\sum_{k=0}^{d} a_k \varphi_{A^k}\right](M)}_{\text{d'après } \mathbf{Q8.}} = \sum_{k=0}^{d} a_k \varphi_{A^k}(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k M = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k A^k\right) M = \varphi_{P(A)}(M)$$

On a ainsi montré que $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$.

Q10. Une matrice (resp. un endomorphisme) est diagonalisable si et seulement si elle (resp. il) possède un polynôme annulateur scindé dont les racines sont toutes simples.

⇢ Si A est diagonalisable, alors il existe un polynôme P scindé dont les racines sont toutes simples tel que $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$.
Par conséquent, $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)} = \varphi_{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$: φ_A possède donc un polynôme annulateur dont les racines sont toutes simples (à savoir P) : φ_A est donc diagonalisable.

⇢ Réciproquement, supposons φ_A diagonalisable : il existe donc un polynôme P scindé dont les racines sont toutes simples tel que $P(\varphi_A) = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$, et donc $\varphi_{P(A)} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$.
Par conséquent, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $P(A) \times M = 0$. Cette égalité étant valable, en particulier, pour $M = \mathrm{I}_n$, on en déduit que $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$: A possède donc un polynôme annulateur dont les racines sont toutes simples (à savoir P), et donc A est diagonalisable.

Q11. D'après **Q9.**, $\chi_A(\varphi_A) = \varphi_{\chi_A(A)}$.
Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$.
Donc $\chi_A(\varphi_A) = \varphi_{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$.
Ainsi, χ_A est un polynôme annulateur de φ_A : on en déduit que les valeurs propres de φ_A sont parmi les racines de χ_A, qui sont les valeurs propres de A. Autrement dit, $\mathrm{Sp}(\varphi_A) \subset \mathrm{Sp}(A)$.
D'autre part, toujours par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_{\varphi_A}(\varphi_A) = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$, et, d'après **Q9.**, $\chi_{\varphi_A}(\varphi_A) = \varphi_{\chi_{\varphi_A}(A)}$.
Par conséquent, $\varphi_{\chi_{\varphi_A}(A)} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$, et, en raisonnant comme à la fin de la question **Q10.**, on en déduit que $\chi_{\varphi_A}(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$, puis, comme dans la démarche ci-dessus, on en déduit que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Sp}(\varphi_A)$.
Finalement, $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(\varphi_A)$.

Q12. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de M, de sorte que l'on peut écrire par blocs : $M = (C_1 \cdots C_n)$.

$$\begin{aligned} M \in E_\lambda(\varphi_A) &\iff \varphi_A(M) = \lambda M \\ &\iff AM = \lambda M \\ &\iff A \times (C_1 \cdots C_n) = (\lambda C_1 \cdots \lambda C_n) \\ &\iff (A \times C_1 \cdots A \times C_n) = (\lambda C_1 \cdots \lambda C_n) \\ &\iff \forall\, k \in [\![1\,;n]\!], A \times C_k = \lambda C_k \\ &\iff \forall\, k \in [\![1\,;n]\!], C_k \in E_\lambda(A) \end{aligned}$$

Q13. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres (deux à deux distinctes), de A, et $r_1, \ldots, r_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Puisque A est diagonalisable, $\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{p} r_k\lambda_k$ et $\det(A) = \prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{r_k}$.

D'après **Q10.**, la diagonalisabilité de A garantit celle de φ_A, si bien que la trace de φ_A est la somme de ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité) et le déterminant de φ_A est le produit de ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité).

Dans les deux phrases précédentes, la trigonalisabilité suffisait, et celle-ci est acquise, puisqu'on travaille dans des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

De plus, d'après **Q11.**, $\operatorname{Sp}(\varphi_A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ et, d'après la remarque qui suit la question **Q12.**, pour tout $k \in [\![1\,;p]\!]$, les espaces $E_{\lambda_k}(\varphi_A)$ et $E_{\lambda_k}(A)^n$ sont isomorphes, donc $\dim(E_{\lambda_k}(\varphi_A)) = \dim\left(E_{\lambda_k}(A)^n\right) = n\dim(E_{\lambda_k}(A))$.
Puisque A est diagonalisable, pour tout $k \in [\![1\,;p]\!]$, $\dim(E_{\lambda_k}(A)) = r_k$, et donc $\dim(E_{\lambda_k}(\varphi_A)) = nr_k$.

Par conséquent, $\operatorname{tr}(\varphi_A) = \sum_{k=1}^{p} nr_k\lambda_k = n\sum_{k=1}^{p} r_k\lambda_k = n\operatorname{tr}(A)$ et $\det(\varphi_A) = \prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{nr_k} = \left(\prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{r_k}\right)^n = \det(A)^n$.

EXERCICE 2 – Les polynômes de Hermite

Partie I – Préliminaires

I.1 - Un produit scalaire sur l'espace des polynômes

Q14. $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ et, par croissances comparées, $t^2 \times t^n e^{-t^2} = t^{n+2}e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $t^n e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, et puisque $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$, $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est aussi intégrable en $+\infty$, et donc intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par parité de $t \mapsto \left|t^n e^{-t^2}\right|$, on en déduit que $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q15. Pour tout $R \in \mathbb{R}[X]$, $t \mapsto R(t)e^{-t^2}$ est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $t \mapsto t^n e^{-t^2}$, où $n \in \mathbb{N}$: comme chacune de ces fonctions est intégrable sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto R(t)e^{-t^2}$ l'est aussi.

Q16. ⇢ Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\varphi(Q,P) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \varphi(P,Q)$: φ est donc symétrique.

⇢ Pour tout $(P_1,P_2,Q) \in \mathbb{R}[X]^3$ et pour tout $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2,Q) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_1P_1(t)+\lambda_2P_2(t))Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lambda_1P_1(t)Q(t)e^{-t^2}+\lambda_2P_2(t)Q(t)e^{-t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \lambda_1\int_{-\infty}^{+\infty} P_1(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t+\lambda_2\int_{-\infty}^{+\infty} P_2(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda_1\varphi(P_1,Q)+\lambda_2\varphi(P_2,Q)
\end{aligned}$$

φ est donc linéaire par rapport à sa première variable : puisque φ est symétrique, on en déduit que φ est bilinéaire.

⇢ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

→ $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, et comme, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t)^2e^{-t^2} \geqslant 0$, par positivité de l'intégrale, $\varphi(P,P) \geqslant 0$.

→ Si, de plus, $\varphi(P,P) = 0$, alors, puisque $t \mapsto P(t)^2e^{-t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t)^2e^{-t^2} = 0$, et comme $e^{-t^2} \neq 0$, $P(t) = 0$. P possède donc une infinité de racines : c'est donc le polynôme nul.

φ est donc définie-positive.

Par conséquent, φ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul de l'intégrale de Gauss

Q17. Puisque $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental du calcul intégral, u est une primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ (c'est la seule qui s'annule en 0), donc u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = e^{-x^2}$.

Q18. Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}\times[0\,;1]$ par $f(x,t) = \dfrac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$.

⇢ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0\,;1]$, donc intégrable sur ce segment.

⇢ Pour tout $t \in [0\,;1]$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

--→ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2x\mathrm{e}^{-(1+t^2)x^2}$ est continue sur $[0\,;1]$.

--→ Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a < b$, et pour tout $(x,t) \in [a\,;b] \times [0\,;1]$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = 2|x|\mathrm{e}^{-(1+t^2)x^2} \leqslant 2\max\{|a|,|b|\}$$

Puisque $t \mapsto 2\max\{|a|,|b|\}$ est continue sur $[0\,;1]$, elle est intégrable sur $[0\,;1]$.

Par conséquent, v est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$v'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(-2x\mathrm{e}^{-(1+t^2)x^2}\right)\mathrm{d}t = -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-(tx)^2}\,\mathrm{d}t = -2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-(tx)^2}\,\mathrm{d}t$$

Q19. Puisque u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $g : x \mapsto u^2(x) + v(x)$ est également de classe $\mathscr{C}^1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = 2u'(x)u(x) + v'(x) = 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t - 2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-(tx)^2}\,\mathrm{d}t$$

Étant donné $x \in \mathbb{R}$, en appliquant à la deuxième intégrale le changement de variable défini par $u = tx$ (la fonction $t \mapsto tx$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$, on peut écrire $\mathrm{d}u = x\mathrm{d}t$), il vient :

$$x\int_0^1 \mathrm{e}^{-(tx)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 0$. g est donc constante, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = g(0) = u(0)^2 + v(0) = 0 + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Q20. Par définition, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} u(x)$.

Or on peut remarquer que, pour tout $x \geqslant 0$:

$$0 \leqslant v(x) \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x^2} \times \frac{\pi}{4}$$

Puisque $\mathrm{e}^{-x^2} \times \dfrac{\pi}{4} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par existence de limite par encadrement, $v(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (ce qu'on aurait pu montrer à l'aide du théorème de convergence dominée).

On déduit de **Q19.** que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u^2(x) + v(x) = \frac{\pi}{4}$, donc $\displaystyle\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}$, et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ (par positivité de l'intégrale), $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Par parité de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Partie II – Quelques propriétés des polynômes de Hermite

Q21. Raisonnons par récurrence et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « H_n est de degré n et son coefficient dominant est 2^n ».

--→ Puisque $H_0 = 1$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

--→ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Alors $\deg(2XH_n) = \deg(X) + \deg(H_n) = 1 + n$, d'après $\mathscr{P}(n)$, et $\deg(H_n') \leqslant \deg(H_n) - 1 < \deg(H_n)$, si bien que $\deg(H_{n+1}) = \deg(2XH_n - H_n') = \max\{\deg(2XH_n), \deg(H_n')\} = \deg(XH_n) = n+1$.
De plus, le coefficient dominant de H_{n+1} est le coefficient de X^{n+1} dans $2XH_n$, et puisque, d'après $\mathscr{P}(n)$, $H_n = 2^nX^n + P_n$, où P_n est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $\deg(P_n) < n$, $2XH_n = 2^{n+1}X^{n+1} + 2XP_n$, et comme $\deg(2XP_n) < n+1$, le coefficient dominant de H_{n+1} vaut 2^{n+1}.
$\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

On conclut à l'aide du principe de récurrence.

Q22. On peut observer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, en tant que composée de telles fonctions.

Pour le reste, raisonnons encore par récurrence en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (-1)^nH_n(x)f(x)$ ».

- Puisque $H_0 = 1$, on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(0)}(x) = \mathrm{e}^{-x^2} = (-1)^0 \times H_0(x) \times f(x)$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
  Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) f(x)$, et donc :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = (-1)^n \left(H_n'(x) f(x) + H_n(x) f'(x)\right) \\ &= (-1)^n \left(H_n'(x) f(x) + H_n(x) \times (-2x)\mathrm{e}^{-x^2}\right) = (-1)^n \left(-2x H_n(x) + H_n'(x)\right) f(x) \\ &= (-1)^n \times (-H_{n+1}(x)) \times f(x) = (-1)^{n+1} H_{n+1}(x) f(x) \end{aligned}$$

  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

On conclut à l'aide du principe de récurrence.

Q23. Puisque $\varphi(H_p, H_q) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) H_q(t) \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) \left((-1)^q f^{(q)}(t)\right)\mathrm{d}t}_{\text{d'après } \mathbf{Q22.}}$, appliquons à cette intégrale (convergente, d'après **Q15.**) une intégration par parties en posant, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left[\begin{array}{ccc} u(t) = H_p(t) & \text{donc} & u'(t) = H_p'(t) \\ v'(t) = (-1)^q f^{(q)}(t) & \text{ou plutôt} & v(t) = (-1)^q f^{(q-1)}(t) \end{array} \right]$$

Puisque u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et comme, par croissances comparées (en exprimant $f^{(q-1)}$ en fonction de H_{q-1}), $u(t)v(t) \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$, la nouvelle intégrale écrite ci-dessous est convergente, et :

$$\varphi(H_p, H_q) = 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} H_p'(t) \times (-1)^q f^{(q-1)}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} H_p'(t) \times (-1)^{q-1} f^{(q-1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

En réitérant cette démarche (ou, plus rigoureusement, en raisonnant encore par récurrence), on justifie que, pour tout $k \in [\![0\,;q]\!]$:

$$\varphi(H_p, H_q) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k)}(t) \times (-1)^{q-k} f^{(q-k)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{q-k} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k)}(t) f^{(q-k)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Q24. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $p < q$, en appliquant l'égalité établie ci-dessus pour $k = q$, il vient :

$$\varphi(H_p, H_q) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(q)}(t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, puisque $p < q$, et comme $\deg(H_p) = p$, $H_p^{(q)}$ est le polynôme nul, donc $\varphi(H_p, H_q) = 0$.
Par symétrie de φ, on vient d'établir que, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \neq q$, $\varphi(H_p, H_q) = 0$.
Ainsi, la famille $(H_0, \dots, H_d)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_d[X]$ (au passage, puisque, pour tout $k \in [\![0\,;d]\!]$, $\deg(H_k) = k \leqslant d$, $H_k \in \mathbb{R}_d[X]$), dont tous les vecteurs sont non nuls (pour tout $k \in [\![0\,;d]\!]$, $\deg(H_k) = k$). Et puisqu'ils sont au nombre de $d + 1$ et comme $\dim(\mathbb{R}_d[X]) = d + 1$, $(H_0, \dots, H_d)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_d[X]$.

Q25. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, en calculant $\varphi(H_p, H_p)$ à l'aide de **Q23.** pour $q = k = p$, il vient :

$$\varphi(H_p, H_p) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(p)}(t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, puisque H_p est un polynôme de degré p et de coefficient dominant égal à 2^p, $H_p^{(p)} = 2^p p!$, donc :

$$\varphi(H_p, H_p) = 2^p p! \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 2^p p! \sqrt{\pi}$$

Finalement, $\|H_p\| = \sqrt{2^p p! \sqrt{\pi}}$.

Partie III – Série génératrice exponentielle des polynômes de Hermite

III.1 - Expression de la série génératrice

Q26. Puisque le rayon de convergence de la série exponentielle est infini, on peut écrire, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\exp(2xz) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2xz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} z^n \text{ et } \exp(-z^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n}$$

et le rayon de convergence de ces deux séries entières est infini.

Q27. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\exp\left(-(x-z)^2\right) &= \exp\left(-x^2+2xz-z^2\right) = \mathrm{e}^{-x^2} \times \exp(2xz) \times \exp\left(-z^2\right) \\
&= \mathrm{e}^{-x^2} \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!}\, z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, z^{2n}\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}(2x)^n}{n!}\, z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, z^{2n}\right)
\end{aligned}$$

On a affaire au produit de Cauchy de deux séries entières de rayon de convergence infini, qui s'écrit donc, à son tour, comme une série entière de rayon de convergence infini, ce qui est précisément le résultat demandé.

Q28. Puisque, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(x-t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$, en notant $g : t \mapsto f(x-t)$, il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \underbrace{\frac{(-1)^n f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{(-1)^n \times (-1)^n H_n(x) f(x)}{n!}}_{\text{d'après } \mathbf{Q22.}} = \frac{H_n(x)}{n!}\, f(x)$$

Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\exp(2xz - z^2) = \mathrm{e}^{x^2} \times \exp\left(-(x-z)^2\right) = \mathrm{e}^{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{H_n(x)}{n!}\, f(x)\right) z^n = \underbrace{\mathrm{e}^{x^2} f(x)}_{=1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, z^n$$

Ce calcul justifie, après coup, que la série entière $\displaystyle\sum_{(n\geqslant 0)} \frac{H_n(x)}{n!}\, z^n$ admet un rayon de convergence infini.

III.2 - Expression intégrale des polynômes de Hermite

Q29. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $\theta \in [0\,;2\pi]$, $|g_n(\theta)| = \dfrac{|H_n(x)|}{n!}$, donc g_n est bornée et $\|g_n\|_\infty = \dfrac{|H_n(x)|}{n!}$.

Or on a vu en **Q28.** que la série entière $\displaystyle\sum_{(n\geqslant 0)} \frac{H_n(x)}{n!}\, z^n$ admet un rayon de convergence infini : en particulier, la série numérique $\displaystyle\sum_{(n\geqslant 0)} \frac{H_n(x)}{n!}$ est absolument convergente, ce qui justifie la convergence normale de $\sum g_n$ sur $[0\,;2\pi]$.

Q30. Débutons avec l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} G_x\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) \mathrm{e}^{ip\theta}\, \mathrm{d}\theta$: d'après **Q28.**, pour tout $\theta \in [0\,;2\pi]$,

$$G_x\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) \mathrm{e}^{-ip\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, \mathrm{e}^{i(n-p)\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(\theta)$$

Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[0\,;2\pi]$, et comme $\sum g_n$ converge normalement sur $[0\,;2\pi]$, il vient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} G_x\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) \mathrm{e}^{-ip\theta}\, \mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(\theta)\right) \mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} g_n(\theta)\, \mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-p)\theta}\, \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-p)\theta}\, \mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ 2\pi & \text{sinon} \end{cases}$

Par conséquent, $\displaystyle\int_0^{2\pi} G_x\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) \mathrm{e}^{-ip\theta}\, \mathrm{d}\theta = \frac{H_p(x)}{p!}\, 2\pi$, et donc :

$$H_p(x) = \frac{p!}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_x\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) \mathrm{e}^{-ip\theta}\, \mathrm{d}\theta$$

EXERCICE 3 – Succession de tirages dans une urne

Partie I – Probabilité de l'événement E

Q31. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k = \bigcap_{k=1}^{n} B_k \cap B_{n+1} \subset \bigcap_{k=1}^{n} B_k$, donc, par croissance de P :

$$p_{n+1} = P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k\right) \leqslant P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = p_n$$

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante. Puisqu'elle est, en outre, minorée (par 0), d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

De plus, par le théorème de continuité monotone, $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n\right)$, autrement dit :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P(E)$$

Q32. Si l'événement $\bigcap_{i=1}^{k} B_i$ est réalisé, l'urne considérée contient $1 + \sum_{i=1}^{k} u_i = S_k$ boules blanches et une boule rouge, donc, au total, $S_k + 1$ boules.

Par conséquent, $P\left(B_{k+1} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{k} B_i\right) = \dfrac{S_k}{S_k+1}$.

Q33. Par la formule des probabilités composées, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} p_n = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \cdots \times P\left(B_n \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{n-1} B_k\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{S_2}{S_2+1} \times \cdots \times \frac{S_{n-1}}{S_{n-1}+1} \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_k+1} \end{aligned}$$

Partie II – Caractérisation de la propriété $P(E) = 0$

Q34. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est la somme partielle de la série (à termes positifs) de terme général u_n (à laquelle on ajoute 1). Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathbb{N}^*$, en particulier, $u_n \geqslant 1$, et donc (u_n) ne converge pas vers 0. La série $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente, et, comme elle est à termes positifs, on en déduit que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Q35. La série $\sum \ln\left(\dfrac{S_k}{S_k+1}\right)$ est à termes négatifs, et est de même nature que $\sum \ln\left(\dfrac{S_k+1}{S_k}\right)$, qui est à termes positifs.

De plus, $\ln\left(\dfrac{S_k+1}{S_k}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{S_k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{S_k}$, puisque $S_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On déduit de cet équivalent, par comparaison de séries à termes positifs, que $\sum \ln\left(\dfrac{S_k+1}{S_k}\right)$ est de même nature que $\sum \dfrac{1}{S_k}$, et donc $\sum \ln\left(\dfrac{S_k}{S_k+1}\right)$ est de même nature que $\sum \dfrac{1}{S_k}$.

Q36. Puisqu'on a vu, en première partie, que $P(E) = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n$, $P(E) = 0$ si et seulement si $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(p_n) étant une suite de nombres strictement positifs, on montre facilement (composition avec ln/exp) que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $\ln(p_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(p_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{S_k}{S_k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\dfrac{S_k}{S_k+1}\right)$, et la divergence de la suite $(\ln(p_n))$ vers $-\infty$ est donc équivalente à la divergence de la série $\sum \ln\left(\dfrac{S_k}{S_k+1}\right)$ (cette série étant à termes négatifs, sa seule façon de diverger est une divergence vers $-\infty$).

A l'aide de **Q35.**, on en déduit que $P(E) = 0$ si et seulement si $\sum \dfrac{1}{S_n}$ diverge.

Q37. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1$, il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = n + 1$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{S_n} = \dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{1}{S_n}$ est divergente.
Par conséquent, d'après **Q36.**, $P(E) = 0$.

Q38. Si on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$, et donc $\dfrac{1}{S_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$: la série $\sum \dfrac{1}{S_n}$ est donc convergente, ce qui implique, d'après **Q36.**, que $P(E) \neq 0$.