

Centrale 2017 - PSI1

Un corrigé

1 Premiers résultats

1.1 Une classe de variables aléatoires

1. Il s'agit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour la prouver, on remarque que $\mathbb{E}((U + tV)^2) \geq 0$ pour tout t . Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, t^2 \mathbb{E}(V^2) + 2t \mathbb{E}(UV) + \mathbb{E}(U^2) \geq 0$$

Comme V n'est pas presque sûrement nulle, $\mathbb{E}(V^2) > 0$ (puisque $V^2 \geq 0$) et on a un trinôme du second degré qui reste positif. Son discriminant est donc négatif ou nul et

$$\boxed{\mathbb{E}(UV)^2 - \mathbb{E}(U^2)\mathbb{E}(V^2) \leq 0}$$

Si on a égalité alors le trinôme admet une racine et il existe t tel que $\mathbb{E}((U + tV)^2) = 0$ et comme $(U + tV)^2 \geq 0$, ceci entraîne que $U + tV$ est presque sûrement nulle.

Réciproquement, s'il existe un tel t alors le trinôme admet une racine et le discriminant est nul. Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(UV)^2 = \mathbb{E}(U^2)\mathbb{E}(V^2) \leq 0 \iff \exists t \in \mathbb{R} / tV + U \text{ est presque sûrement nulle}}$$

Remarque : on a utilisé à deux reprises le fait que si $X \geq 0$ et $\mathbb{E}(X) = 0$ alors X est presque sûrement nulle. Ceci découle du fait qu'en notant x_i , $i \in I$ les valeurs prises par X , on a $\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ qui est une somme de termes positifs et n'est donc nulle que si tous les termes sont nuls ce qui entraîne $\mathbb{P}(X = x_i) = 0$ pour tous les i tels que $x_i \neq 0$.

2. (a) Il existe une constante M telle que $X(\Omega) \subset [-M, M]$. Soit $\tau > 0$; on a

$$\forall x \in X(\Omega), |e^{\tau x} \mathbb{P}(X = x)| \leq e^{\tau M} \mathbb{P}(X = x)$$

Ceci est le terme général d'une série convergente (de somme $e^{\tau M}$) et par formule de transfert, $e^{\tau X}$ est d'espérance finie.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est bornée alors } \forall \tau > 0, X \text{ vérifie } (C_\tau)}$$

- (b) On a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, e^{tk} \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} e^{tk} = \frac{p}{1-p} ((1-p)e^t)^k$$

C'est le terme général d'une série géométrique de raison $(1-p)e^t$ qui converge ssi $e^t < \frac{1}{1-p}$ (tout est positif) i.e. $t < -\ln(1-p)$. C'est la condition pour que $\mathbb{E}(e^{tX})$ existe. On sait alors calculer la somme :

$$\boxed{\forall t < -\ln(1-p), \mathbb{E}(e^{tX}) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}}$$

- (c) On a

$$\forall k \in \mathbb{N}, e^{tk} \mathbb{P}(X = k) = \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} e^{-\lambda}$$

C'est pour tout t le terme général d'une série convergente et $\mathbb{E}(e^{tX}) < +\infty$ avec

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(e^{tX}) = \exp(\lambda(e^t - 1))}$$

3. (a) Si $t \in [a, b]$ alors pour $x \geq 0$, $tx \leq bx$ et pour $x \leq 0$, $tx \leq ax$. Dans chaque cas on peut composer par exp qui croît. Ainsi, e^{tx} est majoré soit par e^{ta} soit par e^{tb} . Et comme exp est positive, un majorant commun est $e^{ta} + e^{tb}$. On en déduit que

$$\forall t \in [a, b], 0 \leq e^{tX} \leq e^{aX} + e^{bX}$$

La somme de deux variables ayant une espérance admet une espérance. Avec le résultat rappelé en préambule,

$$\boxed{\forall t \in [a, b], \mathbb{E}(e^{tX}) < +\infty}$$

L'ensemble $\{t \in \mathbb{R} / \mathbb{E}(e^{tX}) < +\infty\}$ est donc convexe et c'est donc un intervalle (les intervalles sont exactement les convexes de $\mathbb{R}$).

(b) Comme $a < b$, on a

- Au voisinage de $+\infty$, $e^{ay} = o(e^{by})$ et donc $\theta_{k,t,a,b}(y) \sim y^k e^{(t-b)y}$. Pour $t < b$, cette quantité est de limite nulle en $+\infty$.
- Au voisinage de $-\infty$, $e^{by} = o(e^{ay})$ et donc $\theta_{k,t,a,b}(y) \sim y^k e^{(t-a)y}$. Pour $t > a$, cette quantité est de limite nulle en $-\infty$.

$$\forall t \in]a, b[, \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_{k,t,a,b}(y) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \theta_{k,t,a,b}(y) = 0$$

La fonction $\theta_{k,t,a,b}$ est donc bornée par 1 sur des voisinages $[\alpha, +\infty[$ et $]-\infty, \beta]$. Comme elle est continue, elle est aussi bornée par une quantité M sur le segment $[\beta, \alpha]$. Elle est alors bornée par $\max(M, 1)$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall t \in]a, b[, \forall k \in \mathbb{N}, \theta_{k,t,a,b} \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$$

(c) On peut imaginer que l'on travaille encore avec $t \in]a, b[$ et $k \in \mathbb{N}$. En notant M un majorant de $|\theta_{k,t,a,b}|$ sur $\mathbb{R}$, on a alors

$$0 \leq |X|^k e^{tX} \leq M(e^{aX} + e^{bX})$$

Le majorant étant d'espérance finie, il en va de même de $|X|^k e^{tX}$ par le résultat du préambule.

$$\boxed{\forall t \in]a, b[, \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(|X|^k e^{tX}) < +\infty}$$

(d) Notons $\Phi : (y, t) \in \mathbb{R} \times [c, d] \mapsto \theta_{k,t,a,b}(y)$. On a

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall t \in [c, d], |\Phi(y, t)| \leq |y|^k \frac{e^{cy} + e^{dy}}{e^{ay} + e^{by}}$$

Comme en question (b), le majorant est de limite nulle quand y tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Il est donc plus petit que 1 sur une partie $\mathbb{R} \setminus]\alpha, \beta[$:

$$\forall t \in [c, d], \forall y \notin [\alpha, \beta], |\Phi(y, t)| \leq 1$$

Par ailleurs, Φ est continue sur le compact $[\alpha, \beta] \times [c, d]$ et donc bornée par une constante K sur ce compact. Φ est alors bornée par $\max(K, 1)$ sur son domaine.

$$\boxed{\exists M_{k,a,b,c,d} / \forall t \in [c, d], \forall y \in \mathbb{R}, |\theta_{k,t,a,b}(y)| \leq M_{k,a,b,c,d}}$$

4. (a) On sait depuis 3(a) que I est un intervalle. Comme $\forall t \in [-\tau, \tau], 0 \leq e^{tX} \leq e^{\tau|X|}$ et comme $\mathbb{E}(e^{\tau|X|}) < +\infty$, le résultat admis en préambule indique que $[-\tau, \tau] \subset I$.

(b) X et e^{tX} prenant un nombre fini de valeurs, ces variables admettent des espérances et $I = \mathbb{R}$. Notons $x_1, \dots, x_n$ les valeurs deux à deux distinctes prises par X . Par formule de transfert, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_X(t) = \sum_{k=1}^n e^{tx_k} \mathbb{P}(X = x_k)$$

Par théorèmes d'opérations, on a donc

$$\boxed{\varphi_X \in C^\infty(\mathbb{R})}$$

(c) On a cette fois

$$\forall t \in I, \varphi_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{tx_n} p_n$$

On pose $f_n : t \in I \mapsto p_n e^{tx_n}$. On va appliquer le théorème de continuité puis celui de régularité (relatifs aux sommes de séries de fonctions).

- $\forall n, f_n \in C^0(I)$.
- Par définition de I , $\sum(f_n)$ converge simplement sur I . Plus précisément, pour tout segment $[a, b] \subset I$, on a (avec 3(a))

$$\forall t \in [a, b], 0 \leq f_n(t) \leq f_n(a) + f_n(b)$$

et donc $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq f_n(a) + f_n(b)$. Le majorant est le terme général d'une série convergente et $\sum(f_n)$ est donc normalement convergente sur tout segment de I .

Ceci montre que la somme φ_X de la série $\sum(f_n)$ est continue sur I .

- Pour tout n , f_n est de classe C^∞ sur I . Sa dérivée k -ième, pour $k \in \mathbb{N}$, est $f_n^{(k)} : t \mapsto x_n^k p_n e^{tx_n}$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $[c, d]$ un segment inclus dans l'intérieur de I , que nous noterons $\text{Int}(I)$ (on pourrait bien sûr écrire $\dot{I}$). Par définition de l'intérieur d'une partie, il existe $a, b \in I$ tels que $[c, d] \subset]a, b[$. Avec la question 3(d) (et aussi 3(a)) on a

$$\forall t \in [c, d], \forall n, |f_n^{(k)}(t)| \leq p_n M_{k, a, b, c, d} e^{tx_n} \leq M_{k, a, b, c, d} (f_n(a) + f_n(b))$$

On a donc $\|f_n^{(k)}\|_{\infty, [c, d]} \leq M_{k, a, b, c, d} (f_n(a) + f_n(b))$ qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, toutes les séries dérivées de $\sum(f_n)$ convergent normalement sur tout segment de $\text{Int}(I)$.

On peut alors appliquer le théorème de régularité sur $\text{Int}(I)$.

$$\boxed{\varphi_X \in C^0(I) \cap C^\infty(\text{Int}(I))}$$

- (d) Le théorème utilisé ci-dessous stipule aussi que la dérivée k -ième s'obtient en dérivant terme à terme et est donc la somme de la série $\sum(f_n^{(k)})$. Par théorème de transfert, on a donc

$$\boxed{\forall t \in \text{Int}(I), \forall k \in \mathbb{N}, \varphi_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}(X^k e^{tX})}$$

- (e) On peut penser qu'il y a une erreur d'énoncé et que l'on travaille sur l'intérieur sur I (puisque la dérivabilité de φ_X n'a été justifiée que sur cet ensemble).

Notons tout d'abord que e^{tX} est une variable strictement positive et que quand son espérance existe, elle est > 0 . En particulier, $\varphi_X(t) > 0$ pour $t \in I$ et ψ_X est bien définie sur $\text{Int}(I)$. Avec la régularité prouvée, on a $\psi_X \in C^\infty(\text{Int}(I))$ et

$$\forall t \in \text{Int}(I), \psi_X'(t) = \frac{\varphi_X''(t)\varphi_X(t) - \varphi_X'(t)^2}{\varphi_X(t)^2}$$

Or, $\varphi_X''(t)\varphi_X(t) - \varphi_X'(t)^2 = \mathbb{E}(X^2 e^{tX})\mathbb{E}(e^{tX}) - \mathbb{E}(X e^{tX})^2 \geq 0$ avec **1.1** appliquée avec $U = X e^{tX/2}$ et $V = e^{tX/2}$ (qui admettent des moments d'ordre 2 et avec V qui est > 0 et donc non presque sûrement nulle). La dérivée de ψ_X est donc positive et

$$\boxed{\psi_X \text{ croît sur } \text{Int}(I)}$$

Si X n'est pas presque sûrement constante alors (comme $e^{tX/2}$ est > 0), $U/V = X$ n'est pas presque sûrement constante et ψ_X est alors strictement croissante sur l'intérieur de I puisque sa dérivée est > 0 en tout point de cet ensemble (avec le cas d'égalité de **1.1**).

1.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1. Comme X admet un moment d'ordre 2, il en est de même de S_n . De plus, par indépendance mutuelle des X_k (l'argument sert uniquement pour la variance, pour l'espérance on a la linéarité)

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = n\mathbb{E}(X) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = n\mathbb{V}(X)$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_n donne

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{a^2}$$

Il nous suffit d'appliquer ceci avec $a = n\delta$ et d'utiliser les formules données :

$$\boxed{\forall \delta > 0, \mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X)| \geq n\delta) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{n\delta^2}}$$

2. Comme $u < \mathbb{E}(X) < v$, on a $\delta = \min(\mathbb{E}(X) - u, v - \mathbb{E}(X)) > 0$. Si $|S_n - n\mathbb{E}(X)| < n\delta$ alors $n(\mathbb{E}(X) - \delta) < S_n < n(\delta + \mathbb{E}(X))$ et donc $nu \leq S_n \leq nv$. On en déduit que

$$1 - \mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X)| \geq n\delta) = \mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X)| < n\delta) \leq \pi_n$$

et avec la question précédente,

$$1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{n\delta^2} \leq \pi_n$$

Comme $\pi_n \leq 1$, on en déduit par encadrement que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_n = 1}$$

1.3 Suites sur-additives

1. On a $u_{(k+1)m+r} \geq u_m + u_{km+r}$ et donc, par récurrence, $u_{km+r} \geq ku_m + u_r$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier,

$$u_n = u_{qm+r} \geq qu_m + u_r$$

Ainsi, $u_n - ns \geq qu_m + u_r - ns$. Comme $ns = (mq + r)s$, on peut alors regrouper les termes et obtenir

$$\boxed{u_n - ns \geq q(u_m - ms) + u_r - rs}$$

2. Notons $n = qm + r$ la division euclidienne de n par m (c'est possible car $m \geq 1$ et on a $0 \leq r \leq m - 1$). On a alors

$$\frac{u_n}{n} \geq \frac{q}{n}u_m + \frac{u_r}{n} = \frac{u_m}{m} + u_m \left(\frac{q}{n} - \frac{1}{m} \right) + \frac{u_r}{n}$$

Comme $\frac{q}{n} - \frac{1}{m} = \frac{qm - n}{nm} = -\frac{r}{nm}$ on a donc

$$\frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} + \frac{u_r}{n} - \frac{r}{nm}$$

Or, $\left| \frac{u_r}{n} - \frac{r}{nm} \right| \leq \frac{|u_r|+1}{n} \leq \frac{\max(|u_0|, \dots, |u_{m-1}|)+1}{n}$ qui est de limite nulle quand $n \rightarrow +\infty$ (le numérateur du majorant est indépendant de n et ne dépend que de m). Il est donc arbitrairement petit pour n grand et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon > 0, \exists N / \forall n \geq N, \frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} - \varepsilon}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe un entier $m \geq 1$ tel que $\frac{u_m}{m} \geq s - \varepsilon$ (ce réel n'étant pas un majorant de l'ensemble dont s est la borne supérieure puisque s est le plus petit des majorants). La question précédente fournit un N tel que

$$\forall n \geq N, s - 2\varepsilon \leq \frac{u_n}{n} \leq s$$

Par définition de la limite,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = s}$$

2 Le théorème des grandes déviations

2.1 Exposant des grandes déviations

- Supposons que $\mathbb{P}(X \geq a) = 0$. Montrons par récurrence que pour tout n on a $\mathbb{P}(S_n \geq na) = 0$.
 - C'est immédiat pour $n = 1$ puisque $S_1 = X_1$ a la même loi que X .
 - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 1$. On a $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. Si $S_{n+1} \geq (n+1)a$ alors soit $S_n \geq na$, soit $S_n < na$ et alors $X_{n+1} \geq a$ (sinon la somme est $< (n+1)a$). Ainsi

$$0 \leq \mathbb{P}(S_{n+1} \geq (n+1)a) \leq \mathbb{P}(S_n \geq na) + \mathbb{P}(X_{n+1} \geq a)$$

Le majorant est nul par l'hypothèse de récurrence et le résultat supposé sur X .
Réciproquement, si $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathbb{P}(S_n \geq na) = 0$, le résultat pour $n = 1$ donne $\mathbb{P}(X \geq a) = 0$.
Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq a) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(S_n \geq na) = 0}$$

- (a) On a $T = S_{m+n} - S_m = X_{m+1} + \dots + X_{m+n}$. Soit $x \in T(\Omega)$; on a

$$(S_{m+n} - S_m = x) = \bigcup_{\substack{x_1, \dots, x_n \in X(\Omega) \\ x_1 + \dots + x_n = x}} \bigcap_{k=1}^n (X_{m+k} = x_k)$$

Comme la réunion (qui est dénombrable) est disjointe, on a

$$\mathbb{P}(S_{m+n} - S_m = x) = \sum_{\substack{x_1, \dots, x_n \in X(\Omega) \\ x_1 + \dots + x_n = x}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n (X_{m+k} = x_k)\right)$$

Les variables X_{m+k} étant indépendantes,

$$\mathbb{P}(S_{m+n} - S_m = x) = \sum_{\substack{x_1, \dots, x_n \in X(\Omega) \\ x_1 + \dots + x_n = x}} \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_{m+k} = x_k)$$

Les X_i ayant même loi,

$$\mathbb{P}(S_{m+n} - S_m = x) = \sum_{\substack{x_1, \dots, x_n \in X(\Omega) \\ x_1 + \dots + x_n = x}} \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = x_k)$$

Les variables X_k étant indépendantes, on remonte le calcul et on obtient que T a même loi que $X_1 + \dots + X_n = S_n$.

$$\boxed{S_{m+n} - S_m \text{ et } S_n \text{ ont même loi}}$$

- (b) On a

$$(S_{m+n} - S_m \geq nb) \cap (S_m \geq mb) \subset (S_{m+n} \geq (n+m)b)$$

Par lemme des coalitions, $S_{m+n} - S_m$ et S_m sont indépendantes. En passant aux probabilités, on a donc

$$\mathbb{P}(S_{m+n} - S_m \geq nb) \mathbb{P}(S_m \geq mb) \leq \mathbb{P}(S_{m+n} \geq (n+m)b)$$

Avec la question précédente, $S_{m+n} - S_m$ a même loi que S_n et donc

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{m+n} \geq (n+m)b) \geq \mathbb{P}(S_n \geq nb) \mathbb{P}(S_m \geq mb)}$$

3. Comme $\mathbb{P}(X \geq a) > 0$, la question **2.1.1** montre que $\mathbb{P}(S_n \geq na) > 0$ pour tout n . On peut donc poser

$$u_n = \ln(\mathbb{P}(S_n \geq na))$$

La question précédente indique que (u_n) est une suite sur-additive ($u_{m+n} \geq u_n + u_m$). Comme $\frac{u_n}{n} \leq 0$, on peut utiliser la partie **1.3** pour conclure que $\frac{u_n}{n} \rightarrow \gamma_a = \sup\{u_n/n \in \mathbb{N}^*\}$ et cette borne supérieure est négative (les éléments de l'ensemble étant négatifs). Par croissance de l'exponentielle, on passe de $\frac{u_n}{n} \leq \gamma_a$ à $e^{u_n} \leq e^{n\gamma_a}$. Ainsi

$$\boxed{\frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq na))}{n} \rightarrow \gamma \leq 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(S_n \geq na) \leq e^{n\gamma_a}}$$

2.2 Majoration des grandes déviations

1. On a $e^{tS_n} = \prod_{k=1}^n e^{tX_k}$. Les variables X_k étant mutuellement indépendantes, il en va de même des e^{tX_k} . L'espérance du produit est alors égale au produit des espérances. Les X_k ayant la même loi que X , on a donc

$$\boxed{\forall t \in I, \mathbb{E}(e^{tS_n}) = (\varphi_X(t))^n}$$

Si $t \in \mathbb{R}^{+*} \cap I$ alors $S_n \geq na$ équivaut à $tS_n \geq nta$ et donc à $e^{tS_n} \geq e^{nta}$. Comme e^{tS_n} admet une espérance et est à valeurs positives, on peut utiliser l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(S_n \geq na) = \mathbb{P}(e^{tS_n} \geq e^{nta}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{nta}}$$

Si $t = 0$ le résultat reste vrai puisque le majorant vaut alors 1. Avec le premier résultat, on conclut que

$$\boxed{\forall t \in I \cap \mathbb{R}^+, \mathbb{P}(S_n \geq na) \leq \frac{\varphi_X(t)^n}{e^{nta}}}$$

2. (a) Le résultat précédent pour $n = 1$ donne, par croissance du logarithme, la relation $\forall t \in \mathbb{R}^+ \cap I, \ln(\mathbb{P}(X \geq a)) \leq \chi(t)$ (on rappelle que l'on a supposé $\mathbb{P}(X \geq a) > 0$).

$$\boxed{\eta_a = \inf\{\chi(t) / t \in I \cap \mathbb{R}^+\} \text{ existe}}$$

- (b) Notons que puisqu'il existe $\tau > 0$ tel que X vérifie (C_τ) , φ_X est définie sur $[-\tau, \tau]$ et est de classe C^∞ sur $] -\tau, \tau[$. Par formule de Taylor-Young, on a

$$\varphi_X(t) = \varphi_X(0) + t\varphi'_X(t) + o_0(t) = 1 + t\mathbb{E}(X) + o_0(t)$$

On en déduit que $\chi(t) = (\mathbb{E}(X) - a)t + o(t)$ et comme $\mathbb{E}(X) \neq a$,

$$\chi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} (\mathbb{E}(X) - a)t$$

Comme $\mathbb{E}(X) - a < 0$, χ prend des valeurs < 0 sur $I \cap \mathbb{R}^+$ (fonction localement négative au voisinage de 0^+) et donc

$$\boxed{\eta_a < 0}$$

- (c) On peut trouver une suite (t_k) d'éléments de $I \cap \mathbb{R}^+$ telle que $\chi(t_k) \rightarrow \eta_a$. On a alors $\phi_X(t_k)e^{-t_k a} \rightarrow e^{\eta_a}$ et donc $\phi_X(t_k)^n e^{-nt_k a} \rightarrow e^{n\eta_a}$ quand $k \rightarrow +\infty$. On en déduit avec **2.2.1** que

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq e^{n\eta_a}}$$

Ainsi, $\frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq na))}{n} \leq \eta_a$ et donc $\gamma_a \leq \eta_a < 0$.

- (d) Dans le cas où X suit la loi $\mathcal{B}(p)$, on a $\mathbb{P}(X \geq a) = 0$ ssi $a > 1$. De plus $\mathbb{E}(X) = p$. On fait donc l'hypothèse

$$a \in]p, 1]$$

Par théorème de transfert, on a, pour tout t réel,

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = (1-p) + pe^t$$

On en déduit que

$$\forall t \geq 0, \chi(t) = \ln((1-p) + pe^t) - ta$$

ou encore

$$\forall t > 0, \chi(t) = \ln\left((1-p)e^{-ta} + pe^{(1-a)t}\right)$$

Posons $g(t) = (1-p)e^{-ta} + pe^{(1-a)t}$ en sorte que $g'(t) = e^{-ta}(-a(1-p) + p(1-a)e^t)$. g est donc χ est minimale sur $\mathbb{R}^+$ quand $e^t = \frac{a(1-p)}{p(1-a)}$ et le minimum vaut, après un calcul que l'on espérera sans erreur (on remplace e^t par son expression dans $\chi(t)$ et de même on remplace t par le logarithme de l'expression trouvée pour e^t)

$$\eta_a = (1-a) \ln\left(\frac{1-p}{1-a}\right) - a \ln\left(\frac{a}{p}\right)$$

On suppose maintenant que X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On a donc $\mathbb{E}(X) = \lambda$. De plus $\mathbb{P}(X \geq a)$ est > 0 pour toute valeur de a et on impose donc

$$a \in]\lambda, +\infty[$$

Comme $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \exp(\lambda(e^t - 1))$ (question **1.1.2.c**), on a $\chi(t) = \lambda(e^t - 1) - ta$. χ est minimale sur $\mathbb{R}^+$ en t tel que $e^t = \frac{a}{\lambda}$ et on a donc

$$\eta_a = a - \lambda - a \ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)$$

2.3 Le théorème de Cramer

1. (a) Par formule de transfert, on a $\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} \mathbb{P}(X = x)$. Comme $\mathbb{E}(e^{tX}) > 0$ (car e^{tX} est une variable > 0 admet une espérance finie), on a donc

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \frac{e^{tx}}{\mathbb{E}(e^{tX})} \mathbb{P}(X = x) = 1$$

- (b) Par définition de l'espérance, on a (l'existence est légitimée par le calcul après avoir noté que toutes les quantités sont positives)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X') &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X' = x) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \frac{x e^{tx}}{\mathbb{E}(e^{tX})} \mathbb{P}(X = x) \\ &= \frac{1}{\varphi_X(t)} \sum_{x \in X(\Omega)} x e^{tx} \mathbb{P}(X = x) \\ &= \frac{(\varphi_X)'(t)}{\varphi_X(t)} \end{aligned}$$

On sait que $\psi_X = \frac{\varphi_X'}{\varphi_X}$ est strictement croissante. Par ailleurs, $\chi' = \psi_X - a$ est nulle en σ (χ atteignant alors un minimum en un point intérieur). On a donc $\psi_X(\sigma) = a$ et donc ($t > \sigma$), $\psi_X(t) > a$. On en déduit que

$$\boxed{\mathbb{E}(X') > a}$$

2. (a) En notant f la fonction de l'énoncé, $f(X'_1, \dots, X'_n)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(na \leq S'_n \leq nb)$. Avec le résultat admis, on a donc

$$\mathbb{P}(na \leq S'_n \leq nb) = \frac{1}{\varphi_X(t)^n} \mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_n) e^{tS_n})$$

Par formule de transfert,

$$\mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_n) e^{tS_n}) = \sum_{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ na \leq x_1 + \dots + x_n \leq nb}} e^{t(x_1 + \dots + x_n)} \mathbb{P}(X_1 = x_1 \cap \dots \cap X_n = x_n)$$

Dans la somme, $e^{t(x_1 + \dots + x_n)} \leq e^{ntb}$ par croissance de l'exponentielle et donc

$$\mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_n) e^{tS_n}) \leq e^{ntb} \sum_{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ na \leq x_1 + \dots + x_n \leq nb}} \mathbb{P}(X_1 = x_1 \cap \dots \cap X_n = x_n)$$

Enfin la somme est majorée par la somme des $\mathbb{P}(X_1 = x_1 \cap \dots \cap X_n = x_n)$ pour $x_1 + \dots + x_n \geq a$ qui vaut $\mathbb{P}(S_n \geq na)$. On conclut que

$$\boxed{\mathbb{P}(na \leq S'_n \leq nb) \leq \mathbb{P}(S_n \geq na) \frac{e^{ntb}}{\varphi_X(t)^n}}$$

- (b) Comme $a < \mathbb{E}(X') < b$ (avec **2.C.1b** et l'hypothèse sur b) et avec **1.2.2**, on a

$$\pi'_n = \mathbb{P}(na \leq S'_n \leq nb) \rightarrow 1$$

Par ailleurs $\mathbb{P}(S_n \geq na) \leq e^{n\gamma_a}$ avec **2.1.3** et donc

$$\frac{\varphi_X(t)^n}{e^{ntb}} \pi'_n \leq e^{n\gamma_a}$$

On passe au logarithme et on divise par n et on fait tendre n vers $+\infty$:

$$\ln(\varphi_X(t)) - tb \leq \gamma_a$$

On a donc

$$\eta_a + t(a - b) \leq \chi(t) + t(a - b) \leq \gamma_a$$

Soit $\varepsilon > 0$. ψ_X étant continue, on peut trouver $t \in]\sigma, \sigma + 1]$ tel que $0 \leq \psi_X(t) - \psi_X(\sigma) \leq \varepsilon$. On a choisit alors $b = \psi_X(t) + \varepsilon$. On a alors $|a - b| = |\psi_X(\sigma) - b| \leq 2\varepsilon$ et $t|b - a| \leq 2\varepsilon(\sigma + 1)$. On vient de voir que

$$\forall \varepsilon > 0, \eta_a + 2\varepsilon(\sigma + 1) \leq \gamma_a$$

et donc $\eta_a \leq \gamma_a$. **2.2.2c** ayant donné l'inégalité inverse, on conclut que

$$\boxed{\eta_a = \gamma_a}$$

3. (a) Une somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $1/2$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$. Si on se place dans le cas où X suit la loi $\mathcal{B}(1/2)$, S_n suit la loi $\mathcal{B}(n, 1/2)$. On a alors

$$\mathbb{P}(S_n \geq (\alpha + 1/2)n) = \sum_{k \geq (\alpha + 1/2)n} \mathbb{P}(S_n = k) = \frac{1}{2^n} \sum_{k \geq (\alpha + 1/2)n} \binom{n}{k}$$

Par symétrie dans le triangle de Pascal, on a aussi

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k \geq (\alpha + 1/2)n} \binom{n}{k} = \frac{1}{2^n} \sum_{k \leq (-\alpha + 1/2)n} \binom{n}{k}$$

Comme A_n est l'ensemble des k tels que $k \geq (\alpha + 1/2)n$ ou $k \leq (-\alpha + 1/2)n$, on trouve ainsi que

$$U_n = 2^{n-1} \mathbb{P}(S_n \geq (\alpha + 1/2)n)$$

On en déduit que

$$\frac{\ln(U_n)}{n} = \frac{n-1}{n} \ln(2) + \frac{\mathbb{P}(S_n \geq (\alpha + 1/2)n)}{n}$$

Le second terme tend vers $\gamma_{\alpha+1/2} = \eta_{\alpha+1/2}$ pour une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ c'est à dire (après calcul toujours un peu délicat)

$$(\alpha - \frac{1}{2}) \ln(1 - 2\alpha) - (\alpha + \frac{1}{2}) \ln(2\alpha + 1)$$

En passant au logarithme, on obtient PEUT-ETRE (!!!)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n^{1/n} = 2 \frac{(1 - 2\alpha)^{\alpha-1/2}}{(1 + 2\alpha)^{\alpha+1/2}}$$

- (b) Une somme de n variables de Poisson indépendantes et de même paramètre λ est une variable de Poisson de paramètre $n\lambda$. Si on se place dans le cas où X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, S_n suit la loi $\mathcal{P}(n\lambda)$. On a donc

$$\mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) = e^{-n\lambda} \sum_{k \geq n\alpha} \frac{(n\lambda)^k}{k!}$$

et on retrouve $U_n = e^{-n\lambda} T_n$. Comme $U_n^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{\ln(U_n)}{n}\right)$ on est dans le cas $a = \alpha$ et $U_n^{1/n} \rightarrow \exp(\gamma_\alpha) = \exp(\eta_\alpha)$ et donc (formule de **2.2.2d**)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n^{1/n} = e^{\alpha-\lambda} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^\alpha$$

et ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n^{1/n} = e^\alpha \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^\alpha$$