Centrale-Supélec 2006, Math. I

Auteur du corrigé : Robert Cabane ©2007

Partie I : Préliminaires

I.A) t est le paramètre angulaire sur le cercle de rayon b dont l'ellipse $E_{a,b}$ est affine (on l'appelle *l'anomalie excentrique*).
I.B) $\mathcal{S}_r$ est évidemment un espace vectoriel car la relation de récurrence qui le définit est linéaire ; sa dimension est 2 parce que l'application p qui à une suite $a=(a_n)\in\mathcal{S}_r$ fait correspondre $(a_0,a_1)\in\mathbb{R}^2$ est linéaire, injective et surjective puisque la suite a se construit à partir de ses deux premiers termes. Et $\mathcal{B}_r$ est un sous-espace de $\mathcal{S}_r$ (la somme de deux suites de rayons R et R' au moins égaux à 1 est une suite de rayon au moins 1, idem pour le produit par une constante). On ne doit pas considérer que le rayon des suites de $\mathcal{B}_r$ soit toujours 1 puisqu'il y a au moins la suite nulle qui est de rayon infini.
I.C) Voici la formule de Parseval pour une fonction f continue et de période 2π :

$$\|f\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}|c_n(f)|^2\,.$$

Pour traiter le cas de deux fonctions f et g on commence par vérifier que la famille (ou suite) $(c_n(f)c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable comme produit de deux famille de carrés sommables (avec l'inégalité $2|c_n(f)c_n(g)|\leqslant|c_n(f)|^2+|c_n(g)|^2$). Puis on utilise la formule de polarisation qui est vraie tant dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ quand dans l'espace ℓ^2 des suites complexes de carrés sommables (indexées par $\mathbb{Z}$), à savoir :

$$4{<}x|y{>}=\|y+x\|^2-\|y-x\|^2+i\|y+ix\|^2-i\|y-ix\|^2$$

ce qui amène

$$<f|g>=\oint\bar{f}g=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{c_n(f)}c_n(g)\,.$$

I.D) On a $a_n(f)=c_n(f)+c_{-n}(f)$ pour toute fonction $f\in\mathcal{C}_{2\pi}$.
I.E) Commençons par exprimer la longueur de cette ellipse (comme l'intégrale de la norme de la vitesse) :

$$L(a,b)=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\,.$$

D'autre part, il vient

$$a_0(f_r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_r(s)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2r\cos s+r^2}\,\mathrm{d}s$$

or,

$$1-2r\cos s+r^2=\frac{a^2-2ab+b^2-2(a^2-b^2)\cos s+a^2+2ab+b^2}{(a+b)^2}=2\frac{a^2+b^2-(a^2-b^2)\cos s}{(a+b)^2}$$

ce qui nous suggère de passer à l'angle moitié dans $L(a,b)$:

$$L(a,b)=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\frac{1+\cos(2t)}{2}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{a^2-b^2}{2}\cos u}\,\mathrm{d}u$$

tandis que

$$a_0(f_r)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{a^2+b^2-(a^2-b^2)\cos t}}{a+b}\,\mathrm{d}t$$

et finalement nous obtenons $\boxed{L(a,b)=\frac{\pi}{2}(a+b)a_0(f_r).}$

Partie II : Comportement asymptotique

II.A) On utilise la règle de d'Alembert, ici applicable car les coefficients α_n sont non nuls :

$$\frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}=\frac{(2n+1)(2n+2)(2n-1)}{4(n+1)^2(2n+1)}\longrightarrow 1$$

donc le rayon de convergence est 1. Notons en passant (cela servira) que ce rapport est inférieur à 1, donc que la suite $(|\alpha_n|)$ décroît.
II.B) On sait qu'on peut dériver terme à terme la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence ; il reste à factoriser au maximum, ce qui amène :

$$\begin{aligned}(1-x)f'(x)&=\alpha_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)\alpha_{n+1}-n\alpha_n]x^n=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{n(2n)!}{(n!)^2 4^n(2n-1)}-\frac{(n+1)(2n+2)!}{(n+1!)^2 4^{n+1}(2n+1)}\Big]x^n\\&=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2(n!)^2 4^n(2n-1)}x^n=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(f(x)-1)=-\frac{f(x)}{2}\end{aligned}$$

équation différentielle linéaire facile à résoudre et qui donne, compte tenu de $\alpha_0=1$: $f(x)=\sqrt{1-x}$ sur $]-1,1[$.
II.C) On tire de la question précédente que $f(x)^2=1-x$ pour tout x réel dans $]-1,1[$. Cependant, pour x complexe dans le disque unité ouvert la série entière donnant $f(x)$ converge absolument, donc par produit de Cauchy $f(x)^2$ est aussi une somme de série entière de la forme $\sum b_n x^n$. Cette série coïncide avec $1-x$ sur $]-1,1[$, si bien que les coefficients sont les mêmes (Taylor). On a donc $b_0=-b_1=1$ et $b_n=0$ pour $n>1$. Il en résulte que $\boxed{\forall z\in\mathbb{C},\ |z|<1\Rightarrow f(z)^2=1-z.}$

II.D) Soit $z = re^{it}$; il vient aussitôt $f(re^{it})^2 = 1 - re^{it}$ et aussi $|f(re^{it})|^2 = f(re^{-it})f(re^{it}) = |1 - re^{it}| = f_r(t)$. Nous notons à présent $F(t) = f(re^it) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n e^{int}$ série absolument convergente pour $r < 1$ (et de ce fait normalement convergente par rapport à t).

II.E) On a $c_n(f_r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(re^{-it})f(re^{it})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{e^{int}F(t)}F(t)\,\mathrm{d}t$. On souhaite alors utiliser **IC** qui nous demande d'identifier les coefficients de Fourier de la fonction $h_n : t \mapsto e^{int} f(re^{it})$: $c_p(h_n) = \oint e^{-ipt}e^{int}F(t)\,\mathrm{d}t = c_{p-n}(F)$. On a donc $c_n(f_r) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \overline{c_{p-n}(F)}c_p(F)$. Les coefficients de Fourier de F se trouvent à partir de la définition de F par un échange série-intégrale (possible grâce à la convergence normale), et valent $c_p(F) = \alpha_p r^p$ pour $p \geqslant 0$, et rien sinon. Soit encore :

$$c_n(f_r) = \sum_{p\geqslant n, p\geqslant 0} \overline{\alpha_{p-n}r^{p-n}}\alpha_p r^p = \sum_{p\geqslant n,p\geqslant 0} \alpha_{p-n}\alpha_p r^{2p-n} = \sum_{p\geqslant 0} \alpha_p\alpha_{p+n}r^{2p+n} ,$$

la dernière somme ayant été simplifiée en tenant compte du fait que n est supposé naturel.
D'autre part, on a la fonction $\psi_n : x \mapsto \alpha_{\lfloor x\rfloor}\frac{\alpha_{\lfloor n\rfloor+x}}{-\alpha_n}r^{2x}$ qui est positive, décroissante puisque la suite $(-\alpha_k)$ l'est, et en escalier sur $\mathbb{R}_+$. Son intégrale existe (fonction dominée par $x \mapsto r^{2x}$), et vaut par découpage en tranches : $I_n = \frac{1}{-\alpha_n}\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_p\alpha_{p+n}r^{2p} = \frac{1}{-\alpha_n r^n}c_n(f_r)$, ce qu'il fallait.
Lorsque n tend vers l'infini, la suite de fonctions (ψ_n) converge simplement vers $x \mapsto -\alpha_{\lfloor x\rfloor}r^{2x}$ parce que $\frac{\alpha_{\lfloor n\rfloor+x}}{\alpha_n}$ tend vers 1 (c'est un produit d'un nombre fixe de termes de la forme $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}$ qui ont tous une limite 1 comme on l'a vu en **IIA**) en étant majorée par 1. Le théorème de convergence dominée s'applique donc, avec la fonction-limite pour domination. Il vient enfin :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n(f_r)}{\alpha_n r^n} = \int_0^{\infty}\alpha_{\lfloor x\rfloor}r^{2x}\,\mathrm{d}x = \sum_{p=0}^{\infty}\alpha_p r^{2p} = f(r^2) = \sqrt{1-r^2}\,.$$

II.F) De l'équivalent précédent résulte que $2\alpha_n(f_r) = c_n(f_r)$ est équivalent à $\alpha_n r^n\sqrt{1-r^2}$ quand n tend vers l'infini (tous négatifs d'ailleurs). D'autre part, la formule de Stirling permet d'estimer α_n pour n comme $\frac{-(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^{2n}e^{-2n}.2\pi n 4^n(2n-1)} = -\frac{1}{\sqrt{\pi n}(2n-1)}$ et finalement $\boxed{a_n(f_r) \sim -\frac{1}{n\sqrt{n\pi}}r^n\sqrt{1-r^2}.}$

Ce résultat n'est pas très surprenant, car f_r est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, et ses coefficients de Fourier doivent tendre vers 0 plus vite que n'importe quelle suite de puissances de n ; le seul étonnement qu'on peut avoir est relatif au signe de ces coefficients !

Partie III : Approximation de $L(a,b)$

III.A) Il se trouve que $f_r(t) = \sqrt{1 - 2r\cos t + r^2}$, si bien que $f_r'(t) = \frac{r\sin t}{\sqrt{1+r^2-2r\cos t}}$ soit encore $(1 - 2r\cos t + r^2)f_r'(t) = r\sin t f_r(t)$.
On calcule alors les coefficients de Fourier exponentiels des deux membres de l'égalité, en se servant de la formule pour les coefficients de la dérivée, et sachant que $c_n(e^{it}f_r(t)) = c_{n-1}(f_r)$:

$$\begin{aligned} & r(e^{it} - e^{-it})f_r(t) = 2i(1 - r(e^{it} + e^{-it}) + r^2)f_r'(t) \\ \Longrightarrow \quad & r[c_{n-1} - c_{n-1}] = -2[n(1 + r^2)c_n - r(n-1)c_{n-1} - r(n+1)c_{n+1}] \end{aligned}$$

soit encore

$$-2n(1 + r^2)c_n + r(2n-3)c_{n-1} + r(2n+3)c_{n+1} = 0$$

ce qui est exactement la relation $\mathcal{S}_r$; la partie réelle de c_n, moitié de $a_n(f_r)$, vérifie aussi cette relation car les coefficients sont réels, et nous sommes dans $\mathcal{S}_r$. De plus, la suite $(a_n(f_r))$ est un $\mathcal{O}(r^n)$, donc son rayon de convergence est au moins égal à $\frac{1}{r} > 1$. Nous en concluons que $\boxed{\text{la suite } (a_n(f_r)) \text{ appartient à } \mathcal{B}_r.}$

III.B) Les deux suites (A_n) et (B_n) forment tout simplement une base de l'espace $\mathcal{S}_r$ puisque leurs deux premiers termes respectifs ne forment pas un couple de vecteurs liés dans $\mathbb{R}^2$. La loi d'évolution des suites de $\mathcal{S}_r$ peut être codée matriciellement sous la forme

$$V_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \text{ avec } T_n = \begin{pmatrix} \frac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)} & -\frac{2n+3}{2n-3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(oui c'est curieux de progresser ainsi à l'envers, on pense plus naturellement à T_n^{-1} mais ce n'est pas non plus un obstacle).
Voici le code Maple permettant d'obtenir a_n à partir de a_0,a_1,n et r :

```
iter := proc (a0, a1, n)
 local k, x, y, z;
 x := a0; y := a1;  # initialisation
 for k from 2 to n do
 z := x; x := y; # mémorisation
```

```
 y := 2*k*(1+r^2)*x/r(2*k-3)-(2*k+1)*z/(2*k-5) # itération
 od
end;
```

Pour obtenir B_n il suffit d'appeler `iter(0,1,n)` et pour A_n c'est `iter(1,-2*(1+r2̂)/r)`.

Si on pose $M_n = \begin{pmatrix} A_n & -\frac{2n+3}{2n-3}A_{n-1} \\ B_n & -\frac{2n+3}{2n-3}B_{n-1}\end{pmatrix}$, il vient $M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{r}(1+r^2)n & 5 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned} M_{n-1}T_n &= \begin{pmatrix} A_{n-1} & -\frac{2n+1}{2n-5}A_{n-2} \\ B_{n-1} & -\frac{2n+1}{2n-5}B_{n-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)} & -\frac{2n+3}{2n-3} \\ 1 & 0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)}A_{n-1} - \frac{2n+1}{2n-5}A_{n-2} & -\frac{2n+3}{2n-3}A_{n-1} \\ \frac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)}B_{n-1} - \frac{2n+1}{2n-5}B_{n-2} & -\frac{2n+3}{2n-3}B_{n-1}\end{pmatrix} = M_n\end{aligned}$$

Du fait que T_n permet de déduire V_{n-1} en fonction du vecteur V_n, on a

$$V_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1\end{pmatrix} = T_1T_2\dots T_nV_n = P_nV_n \text{ avec } P_0 = I_2,\ P_1 = T_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{r}(1+r^2) & 5 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = M_1 \text{ et } P_n = P_{n-1}T_n\,.$$

C'est la même relation de récurrence que pour les matrices M_n, avec la même initialisation : on a donc $P_n = M_n$ pour tout n, et finalement $M_n\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1\end{pmatrix}$.

III.C) Notons $v_n = |u_n - \ell|$; c'est une suite positive dont on cherche la limite nulle. La suite (ε_n) est bornée (disons par M) et est inférieure à δ pour $n \geqslant n_0$ (on précisera δ un peu plus tard). Nous avons par hypothèse $v_n \leqslant kv_{n-1} + \varepsilon_n$, ce qui amène par récurrence une majoration

$$v_n \leqslant k^nv_0 + \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_jk^{n-j} \leqslant k^nv_0 + \sum_{j=1}^{n_0-1}Mk^{n-j} + \sum_{j=n_0}^{n}\delta k^{n-j} \leqslant k^n\big[v_0 + \sum_{j=1}^{n_0-1}Mk^{-j}\big] + \delta\sum_{i=0}^{\infty}k^i = k^nA + \frac{\delta}{1-k}$$

expression que nous rendons inférieure à ε en deux temps : d'abord le choix de $\delta < \frac{\varepsilon}{2}(1-k)$, puis pour ce δ fixé, choix de n_0, donc de A, et enfin n assez grand pour que $k^nA < \frac{\varepsilon}{2}$.

III.D) L'application de la relation trouvée en **IIIB** nous donne $a_0 = A_na_n - \frac{2n+3}{2n-3}A_{n-1}a_{n+1}$ (en notant $a_n = a_n(f_r)$, grâce à **IIIA**). Intéressons-nous à la suite $x_n = A_na_n$. On a vu au **IIF** que $a_n \sim K\frac{r^n}{n^{3/2}}$, si bien que $a_{n+1} = r^2a_{n-1} + o(a_{n-1})$, ce qui amène $a_0 = x_n - \frac{2n+3}{2n-3}r^2x_{n-1} + o(x_{n-1})$. On fait un peu de développement limité sur la fraction $\frac{2n+3}{2n-3}$, aboutissant à $a_0 = x_n - r^2x_{n-1} + o(x_{n-1})$. Pour nous approcher davantage du résultat de la question précédente, réécrivons a_0 : $a_0 = \frac{a_0 - r^2a_0}{1-r^2}$; ainsi, on pose $u_n = \left|x_n - \frac{a_0}{1-r^2}\right|$, et on trouve $u_n = r^2u_{n-1} + o(u_{n-1}) + o(1)$ (le terme $o(1)$ est dû à la translation). Prenons un nombre $\rho \in]r^2, 1[$; à partir d'un certain rang on aura certainement $r^2u_{n-1} + o(u_{n-1}) \leqslant \rho u_{n-1}$, et une majoration du type $0 \leqslant u_n \leqslant \rho u_{n-1} + \varepsilon_n$, la suite (ε_n) étant de limite nulle. On applique enfin la question précédente, ce qui donne comme espéré $A_na_n \sim \frac{a_0(f_r)}{1-r^2}$.

En ce qui concerne B_n, il suffit de lire la seconde ligne de la matrice M_n, et il vient $B_na_n \sim \frac{a_1}{1-r^2}$. Notons au passage que les deux suites $(|A_n|)$ et $(|B_n|)$ croissent assez rapidement (à la vitesse de $n^{3/2}({}^1\!/_r)^n$).

III.E) On commence à deviner le but du sujet qui est de trouver des approximations de la longueur de l'ellipse. On a $L(a,b) = \lim\limits_n A_na_n(f_r)\frac{\pi(a+b)(1-r^2)}{2}$. Cependant, la suite $(a_n(f_r))$ ne nous est pas mieux connue que $a_0(f_r)$ et la question **IIE** s'avère utile : $a_n(f_r) \sim 2\alpha_nr^n\sqrt{1-r^2}$, et $L(a,b) = \lim\limits_n 2A_n\alpha_nr^n\sqrt{1-r^2}_n\frac{\pi(a+b)(1-r^2)}{2} = \lim\limits_n A_n\alpha_nr^n\pi(a+b)(1-r^2)^{3/2}$. On examine, par conséquent, la suite $y_n = A_n\alpha_nr^n\pi(a+b)(1-r^2)^{3/2}$. Il vient déjà $y_0 = (a+b)\pi(1-r^2)^{3/2} = \ell_0$ (car $\alpha_0 = A_0 = 1$) et $y_1 = y_0 \times ra_1A_1 = \ell_0.\frac{-1}{2}.\frac{-2}{r}(1+r^2) = \ell_1$, c'est bon signe. Un grand courage permet alors d'adapter la relation de récurrence des A_n en tenant compte des nombres $r^n\alpha_n$, de trouver la relation proposée pour les ℓ_n, et une récurrence à deux étages permet de conclure à $y_n = \ell_n$ pour tout n.

Remarque : La convergence de la suite (ℓ_n) vers $L(a,b)$ est réellement très lente, si bien que ce ne sont pas de fort bonnes approximations de la longueur de l'ellipse !

Partie IV : Étude de $\mathcal{S}_r$ et $\mathcal{B}_r$

IV.A) L'expression demandée est manifestement un déterminant : $a_1A_n - a_0B_n = \begin{vmatrix} A_n & a_0 \\ B_n & a_1\end{vmatrix}$. D'une part, on a $\begin{pmatrix} A_n \\ B_n\end{pmatrix} = M_n\begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix}$, et d'autre part $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1\end{pmatrix} = M_n\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1}\end{pmatrix}$ (question **IIIB**). La définition du déterminant d'un endomorphisme amène aussitôt $\begin{vmatrix} A_n & a_0 \\ B_n & a_1\end{vmatrix} = \det M_n\begin{vmatrix} 1 & a_n \\ 0 & a_{n+1}\end{vmatrix}$ soit $a_1A_n - a_0B_n = \det M_n.a_{n+1}$.

IV.B) On a $\det T_n = \frac{2n+3}{2n-3}$ et $\det M_n = \det M_{n-1} \det T_n = \ldots = \det M_1 \prod\limits_{k=2}^{n} \det T_k$. Ce dernier produit est télescopique car les nombres impairs du numérateur se simplifient tôt ou tard avec ceux du dénominateur, à quelques exceptions près. Il reste :

$$\det M_n = \begin{vmatrix} * & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \frac{(2n+3)(2n+1)(2n-1)}{3.5} = -\frac{(2n+3)(2n+1)(2n-1)}{3} \sim -\frac{8n^3}{3} \,.$$

IV.C) L'espace $\mathcal{B}_r$ est a priori de dimension 1 ou 2 car il contient au moins la suite non nulle $a_n(f_r)$; la dimension 2 signifierait que toutes les suites de $\mathcal{S}_r$ sont de limite nulle ce qui n'est absolument pas le cas comme on l'a vu au **IIID**. En conséquence, $\mathcal{B}_r$ est de dimension 1 et admet comme base la suite $(a_n(f_r))$. Du coup, l'espace $\mathcal{S}_r$ admet comme base le couple $((A_n), (a_n(f_r)))$. Les autres de $\mathcal{S}_r \setminus \mathcal{B}_r$ sont des combinaisons linéaires de (A_n) et $(a_n(f_r))$, qui à l'infini se comportent comme A_n c'est-à-dire équivalentes à $\frac{B}{n^{3/2} r^n}$, B étant une constante.

Partie V : Licence de documentation publique (version 1.1)

Section A : Définitions

A1) « Utilisation Commerciale » signifie la distribution ou tout autre moyen de mise à disposition d'un tiers de la documentation.
A2) « Contributeur » signifie une personne ou une entité qui crée ou contribue à la création de modifications.
A3) « Documentation » signifie la documentation originale ou les modifications ou des combinaisons de la documentation originale et les modifications, dans chaque cas, incluant des parties de celles-ci.
A4) « Mécanisme de distribution électronique » signifie un mécanisme communément accepté pour le transfert électronique de données.
A5) « Auteur initial » signifie l'individu ou l'entité qui a été identifié(e) comme étant l'Auteur initial dans la notice obligatoire requise par l'Annexe.
A6) « Œuvre plus importante » signifie une œuvre qui combine de la documentation ou des parties de celle-ci avec de la documentation ou d'autres écrits qui ne sont pas couverts par les conditions de cette licence.
A7) « Licence » signifie ce document.
A8) « Modifications » signifie toute addition, ou suppression, de substance ou de structure d'une documentation originale ou autres modifications précédentes, telles que traduction, abstraction, résumé, ou toute autre forme dans laquelle la documentation originale ou modifications précédentes peut être resaisie, transformée ou adaptée. Une œuvre consistant en des révisions éditoriales, annotations, élaborations, et autres modifications qui, en tant qu'œuvre entière représente une œuvre de l'esprit original, est considérée comme étant une modification. Par exemple, lorsque la documentation est distribuée sous forme d'une série de documents, une modification est comprise comme étant :
A. Toute addition à, ou suppression de, contenu de la documentation originale ou des modifications précédentes.
B. Toute nouvelle documentation qui comporte toute partie de la documentation originale ou modifications précédentes.
A9) « Documentation originale » signifie de la documentation décrite comme étant la documentation originale dans la notice obligatoire requise par l'Annexe, et qui, au moment de sa distribution selon les conditions de cette licence ne constitue pas encore de la documentation couverte par cette licence.
A10) « Forme éditable » signifie la forme préférée de la documentation pour y effectuer des modifications. La documentation peut être sous forme électronique, compressée, ou sous forme d'archive, à condition que le logiciel de décompression ou de désarchivage soit largement disponible de manière gratuite.
A11) « Vous » (ou « Votre ») signifie un individu ou une entité juridique qui exerce des droits conformément à, et en respectant, toutes les conditions de cette Licence ou une version future de cette licence telle que publiée selon la Section D1 (« Versions de la Licence »). Pour des entités juridiques, « vous » couvre également toute entité qui contrôle, ou est contrôlée par, ou qui est sous contrôle commun avec vous. Pour les besoins de la présente définition, « contrôle » signifie
(a) le pouvoir, direct ou indirect, de diriger ou gérer une telle entité, que ce soit de manière contractuelle ou par tout autre moyen, ou
(b) la propriété de plus de cinquante pour cent (50%) des actions libérées ou de la propriété réelle d'une telle entité.

Section B : CONCESSIONS DE LICENCES

B1) [Concession de Licence de l'Auteur Initial] L'Auteur Initial vous concède, par la présente, une licence non-exclusive mondiale, sans redevances, d'utiliser, reproduire, préparer des modifications, compiler, représenter publiquement, afficher publiquement, faire démonstration, commercialiser, divulguer et distribuer la documentation sous toutes formes, sur tous supports ou via tout Mécanisme de Distribution Electronique ou autres méthodes connues aujourd'hui ou à découvrir à l'avenir, ainsi que le droit de concéder des sous-licences les droits énumérés précédemment à des tiers, à travers des systèmes multiples de sous-licences, selon les conditions de cette Licence.
Les droits de licence concédés dans la Section B1 (« Concession de Licence de l'Auteur Initial ») deviennent effectifs à la première date de distribution, par l'Auteur Initial de la documentation originale selon les conditions de cette Licence.
B2) [Concession de Licence du Contributeur] Chaque Contributeur vous concéde, par la présente, une licence non-exclusive mondiale, sans redevances, d'utiliser, reproduire, préparer des modifications, compiler, représenter publiquement, afficher publiquement, faire démonstration, commercialiser, divulguer et distribuer la documentation sous toutes formes, sur tous supports ou via tout Mécanisme de Distribution Electronique ou autres méthodes connues aujourd'hui ou à découvrir à l'avenir, ainsi que le droit de concéder des sous-licences les droits énumérés précédemment à des tiers, à travers des systèmes multiples de sous-licences, selon les conditions de cette Licence.
Les droits de licence concédés dans cette Section B2 (« Concession de Licence du Contributeur ») deviennent effectifs à la première date que le Contributeur fait, pour la première fois, une Utilisation Commerciale la documentation.

Section C : OBLIGATIONS DE DISTRIBUTION

C1) [Application de la licence] Les modifications que vous créez ou auxquelles vous contribuez sont couvertes par cette licence, y compris sans limitation la Section B2 (« Concession de licence du Contributeur »). La documentation peut être distribuée seulement selon les conditions de cette licence ou toute version future publiée selon la Section D1 (« Versions de la licence »), et Vous devez intégrer une copie de cette licence dans chaque copie de la documentation que Vous distribuez. Vous ne pouvez offrir ou imposer des conditions qui modifient ou restreignent la version applicable de cette licence ou des droits concédés selon celle-ci. Toutefois, vous pouvez inclure un document additionnel qui offre les droits additionnels décrits à la Section C5 (« Notices nécessaires »).
C2) [Disponibilité de la documentation] Toute modification que Vous créez ou à laquelle Vous contribuez doit être disponible publiquement dans une Forme Éditable selon les conditions de cette Licence à travers un support tangible ou un Mécanisme de Distribution Électronique accepté.
C3) [Description des modifications] Toute documentation à laquelle vous contribuez doit identifier les modifications que vous avez effectuées dans la création du Document, ainsi que la date de telles modifications. Vous devez inclure une déclaration facilement visible indiquant que la modification est dérivée, directement ou indirectement de la documentation originale fournie par l'Auteur Initial et inclure le nom de l'Auteur Initial dans la documentation ou via un lien électronique qui décrit l'origine ou la propriété de la documentation. La documentation modifiée peut être créée par un programme électronique qui suit automatiquement les changements dans la documentation, et de tels changements doivent pouvoir être disponibles pour le public pendant au moins 5 ans après la première distribution de la documentation .
C4) [Propriété Intellectuelle] Le Contributeur garantit que celui-ci croit que ses modifications sont des créations originales du Contributeur, et/ou que le Contributeur détient des droits suffisants lui permettant de concéder les droits indiqués dans cette Licence.
C5) [Notices nécessaires] Vous devez reproduire la notice figurant dans l'Annexe dans chaque fichier de documentation. S'il n'est pas possible d'inclure une telle notice dans un fichier de documentation particulier, du fait de la structure du fichier, vous devez alors inclure une telle notice dans un endroit (tel qu'un répertoire) où un lecteur serait capable de chercher une telle notice, par exemple, via un hyperlien dans chaque fichier de la documentation qui renverra le lecteur vers une page qui décrit l'origine et la propriété de l'œuvre. Si vous avez créé une ou plusieurs modification(s) vous pouvez ajouter votre propre nom, en tant que Contributeur, à la notice décrite en Annexe.
Vous devez également reproduire cette licence dans tout fichier de documentation (ou mettre un hyperlien dans chaque fichier de la documentation) à l'endroit où vous expliquez les droits d'utilisateur ou de propriété.
Vous pouvez offrir à la vente, et faire payer, des services de garantie, soutien, indemnité ou responsabilité civile vis-à-vis d'un ou de plusieurs récipiendaires de la documentation. Toutefois, vous ne pouvez faire ceci que sous votre propre responsabilité, et non pas sous la responsabilité de l'Auteur Initial ni un quelconque Contributeur. Vous devez faire clairement apparaitre que toute garantie, soutien, indemnité ou responsabilité que vous offrez, est faite uniquement par vos soins, et vous marquez par la présente votre accord de dédommager l'Auteur Initial ainsi que chaque Contributeur par rapport à toute demande en garantie envers laquelle l'Auteur Initial ou tout Contributeur pourrait être appelé du fait des services de garantie, soutien, indemnité ou de responsabilité civile que vous offrez.
C6) [Œuvre plus importante] Vous pouvez créer une œuvre plus importante en combinant la documentation avec d'autres documents non couverts par la présente Licence et ainsi distribuer l'œuvre plus importante sous la forme d'un seul produit. Dans ce cas, vous devez vous assurer que les conditions de cette licence soient respectées pour la documentation.

Section D : Champ d'application de la licence

Cette Licence s'applique à la documentation à laquelle l'Auteur Initial a joint cette Licence et la notice qui apparait en Annexe.

Section E : VERSIONS DE LA LICENCE

E1) [Nouvelles Versions] L'Auteur Initial peut publier des versions révisées et/ou nouvelles de la Licence de temps à autre.
E2) [Effets des nouvelles versions] Si la documentation a été publiée selon les conditions d'une version particulière de la licence, vous pouvez continuer à l'utiliser selon les conditions de cette version. Vous pouvez également décider d'utiliser une telle documentation selon les conditions de toute version ultérieure de la licence publiée par Robert Cabane. Personne d'autre que Robert Cabane n'a le droit de modifier les conditions de cette licence. Le fait de fournir le nom de l'auteur initial, la documentation originale ou le contributeur dans la notice décrite dans l'Annexe ne sera pas considéré comme une modification de cette Licence.

Section F : DÉCHARGE DE GARANTIE

LA DOCUMENTATION EST FOURNIE SELON LES CONDITIONS DE CETTE LICENCE « TEL QUEL », SANS GARANTIE AUCUNE, QU'ELLE SOIT EXPRESSE OU IMPLICITE, Y COMPRIS, SANS LIMITATION AUCUNE, SANS GARANTIE QUE LA DOCUMENTATION NE COMPORTE AUCUN DÉFAUT, NE SOIT COMMERCIALISABLE, NE CONVIENNE A UNE UTILISATION QUELCONQUE, NI NE SOIT CONSIDÉRÉE COMME UNE CONTREFRAÇON. LA TOTALITÉ DES RISQUES RELATIFS A LA QUALITÉ, PRECISION, ET EXECUTION DE LA DOCUMENTATION DEMEURE CHEZ VOUS. SI LA DOCUMENTATION S'AVÉRERAIT ÊTRE DÉFECTUEUSE PAR QUELQUE BIAIS QUE CE SOIT, VOUS (ET NON PAS L'AUTEUR INITIAL OU TOUT AUTRE CONTRIBUTEUR) DEVEZ ASSUMER LES FRAIS DE TOUTE MAINTENANCE, REPARATION OU CORRECTION. CETTE DÉCHARGE DE GARANTIE CONSTITUE UNE PARTIE ESSENTIELLE DE CETTE LICENCE. AUCUNE UTILISATION DE LA DOCUMENTATION N'EST AUTORISÉE SANS L'APPLICATION DE CETTE DÉCHARGE.

Section G : RÉSILIATION

Cette licence, ainsi que les droits qui y sont concédés, sera résiliée de plein droit et de manière automatique si Vous ne respectez pas les conditions de celle-ci et si vous ne corrigez pas votre manquement à ses obligations dans un délai de 30 jours à partir du moment où vous avez connaissance d'un tel manquement. Toutes sous-licences de la Documentation qui ont été concédées en respect des obligations resteront en vigueur malgré la résiliation de cette licence. Toute clause qui, de par sa nature nécessite qu'elle survive à la résiliation, demeurera en vigueur.

Section H : LIMITATION DE RESPONSABILITÉ

DANS AUCUNE CIRCONSTANCE, OU SELON AUCUNE THÉORIE DE DROIT, QU'ELLE SOIT DELICTUELLE (Y COMPRIS NÉGLIGENCE), CONTRACTUELLE, OU DE QUELQU'AUTRE MANIÈRE QUE CE SOIT, L'AUTEUR INITIAL, TOUT AUTRE CONTRIBUTEUR, OU DISTRIBUTEUR DE LA DOCUMENTATION, OU TOUT FOURNISSEUR DE L'UNE QUELCONQUE DES PARTIES PRÉCÉDEMMENT NOMMÉES, NE POURRONT ÊTRE TENUS RESPONSABLE ENVERS QUICONQUE POUR TOUT DOMMAGE DIRECT, INDIRECT, PARTICULIER, INCIDENT, OU CONSÉQUENT DE QUELQUE NATURE QUE CE SOIT, COMPRENANT, SANS LIMITATION, DES DOMMAGES IMPUTABLES A LA PERTE D'UN FONDS DE COMMERCE, ARRÊT DE TRAVAIL, PANNE OU DYSFONCTIONNEMENT D'ORDINATEUR, OU TOUS AUTRES DOMMAGES OU PERTES PROVOQUÉS PAR OU LIÉS À L'UTILISATION DE LA DOCUMENTATION, MÊME SI UNE TELLE PARTIE A ÉTÉ PRÉVENUE DE LA POSSIBILITÉ DE TELS DOMMAGES.

Section I : DISPOSITIONS FINALES

Cette Licence représente l'accord complet relatif à l'objet de celle-ci. Si une quelconque clause de cette Licence devrait être considérée comme nulle ou inapplicable, une telle clause ne sera modifiable que dans la mesure où elle puisse devenir applicable et valable. Dans tout différend ou litige dans l'application ou l'interprétation de cette licence, la partie perdante prendra en charges tous frais, y compris sans limitation, tous frais de procédure et des frais et dépenses d'avocats raisonnables. L'application de la Convention des Nations Unies régissant des Contrats pour la Vente Internationale de Marchandises est expressément exclue.

Section J : Annexe

La documentation originale s'intitule « Centrale-Supélec 2006, Math. I ». L'Auteur initial de la documentation originale est Robert Cabane.
 (Coordonnées de l'auteur initial : rcab AT free.fr).