Exercice 1

Questions de cours

1. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, elle est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

2. La dérivée de la fonction arctan est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim\limits_{-\infty} \arctan = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{+\infty} \arctan = \dfrac{\pi}{2}$, donc la courbe de la fonction arctan admet deux asymptotes horizontales d'équations $y = -\dfrac{\pi}{2}$ et $y = +\dfrac{\pi}{2}$.
Enfin, $\arctan 0 = 0$ et $\arctan'(0) = 1$, donc la tangente en 0 est la droite d'équation $y = x$.

3. D'après l'étude précédente, il est évident que la fonction arctan est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $N_0(\arctan) = \dfrac{\pi}{2}$.

4. On pose $w : t \mapsto \arctan(v(t))$.
Alors en supposant v dérivable sur un intervalle I, w est dérivable sur I et pour tout $t \in I$, $w'(t) = \dfrac{v'(t)}{1+v(t)^2}$.

5. On pose $\varphi : t \mapsto \arctan(t) + \arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Cette fonction est définie et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\varphi'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} + \left(\dfrac{-1}{t^2}\right) \times \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} = \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{1}{1+t^2} = 0$.
Donc sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, φ est constante (attention : elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}^*$, car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle !). Or $\varphi(1) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\varphi(-1) = \dfrac{-\pi}{2}$.
Donc pour tout $t \neq 0$, $\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } t > 0 \\ \dfrac{-\pi}{2} & \text{si } t < 0 \end{cases}$

*****

6. Soit f une fonction de E.

6.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left|\arctan(tx) \times \dfrac{f(t)}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2} N_0(f) \dfrac{1}{1+t^2}$ (inégalité E).

Or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et équivalente en $+\infty$ à $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$, qui est une fonction intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc par comparaison entre fonctions positives, $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
Donc toujours par comparaison entre fonctions positives, la fonction $t \mapsto \left|\arctan(tx) \times \dfrac{f(t)}{1+t^2}\right|$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, ce qui revient à dire que $t \mapsto \arctan(tx) \times \dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

6.2. Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $x \mapsto \arctan(tx) \times \dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Et l'inégalité (E) est une hypothèse de domination sur $[0, +\infty[$, puisque la fonction majorante est intégrable et indépendante de x. Donc d'après le th. de continuité sous le signe $\displaystyle\int$, $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, grâce à l'inégalité (E) et l'inégalité triangulaire sur les intégrales, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\Phi(f)(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\arctan(tx) \times \frac{f(t)}{1+t^2}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2} N_0(f) \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t < +\infty$$

donc $\Phi(f)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
Finalement on a bien montré que $\Phi(f)$ appartient à E.

6.3. arctan étant une fonction impaire, il est évident que $\Phi(f)$ l'est aussi, donc une étude sur $[0, +\infty[$ suffit.

7. La question précédente prouve que Φ est une application de E dans E. La linéarité de Φ découle de façon immédiate de celle de l'intégrale. Donc Φ est un endomorphisme de E.

8. On pose $F(x,t) = \arctan(tx) \times \dfrac{f(t)}{1+t^2}$.
On sait déjà que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $t \mapsto F(x,t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
Il est immédiat que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $x \mapsto F(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{1+(xt)^2} \times \dfrac{f(t)}{1+t^2}$.

Enfin, soit $0 < a$ un réel : pour tout $x \in [a, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant N_0(f)\dfrac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$.

Or $\varphi : t \mapsto \dfrac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et équivalente en $+\infty$ à $t \mapsto \dfrac{1}{a^2t^3}$, qui est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc φ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Cette inégalité est donc une hypothèse de domination de $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,.)\right|$ pour $x \geqslant a$.

D'après le th. de dérivabilité sous le signe $\displaystyle\int$, la fonction $\Phi(f)$ est donc de classe C^1 sur $[a,+\infty[$.

Mais comme ceci est vrai pour tout $a > 0$, par réunion d'intervalles, la fonction $\Phi(f)$ est donc de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et $\Phi(f)'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+(xt)^2} \times \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$.

9. *Que vient faire cette question au milieu de l'étude ?*

9.1. C'est du cours : une limite uniforme de fonctions continues est continue. *La question n'est pas claire : faut-il donner la preuve de ce théorème du cours ?*

9.2. Puisque $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers h, la suite $(N_0(h_n - h))$ converge vers 0, donc elle est bornée : il existe un réel $K > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $|h_n(t) - h(t)| \leqslant K$.
En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|h(t)| \leqslant |h(t) - h_0(t)| + |h_0(t)| \leqslant K + N_0(h_0)$, donc h est bornée sur $\mathbb{R}$.

10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

10.1. D'abord, on remarque que pour tout $x > 0$ et $t \geqslant 0$, $\left|\dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{1+t^2}$ et que $t \mapsto \dfrac{\pi}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$: hypothèse de domination.

Ensuite, pour tout $t > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} = \frac{\pi}{2(1+t^2)}$ et pour $t = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} = 0$: la famille de fonctions $\left(t \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}\right)_{x>0}$ vers la fonction continue par morceaux $t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \dfrac{\pi}{2(1+t^2)} & \text{si } t > 0 \end{cases}$ quand x tend vers $+\infty$.

D'après le th. de convergence dominée, on peut intervertir limite et intégrale :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

10.2. D'après la question 8, g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $g'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+(xt)^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

10.3. On pose $h : x \mapsto g(x) + g\left(\dfrac{1}{x}\right)$. D'après la question 10.2, h est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = g'(x) - \frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+(xt)^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+\frac{t^2}{x^2})(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$h'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+(xt)^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{t}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

Dans la deuxième intégrale, on effectue le changement de variables $t = \dfrac{1}{u}$ (qui est bien un changement de variables C^1 et bijectif), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{t}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t &= \int_{+\infty}^{0} \frac{\frac{1}{u}}{(x^2+\frac{1}{u^2})(1+\frac{1}{u^2})} \times \left(\frac{-1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u}{u^4(x^2+\frac{1}{u^2})(1+\frac{1}{u^2})}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u}{(u^2x^2+1)(u^2+1)}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

On retrouve donc la première intégrale, on en déduit que $h'(x) = 0$. La fonction h est constante sur $]0,+\infty[$.
Enfin, comme g est continue sur $\mathbb{R}$ (question 6.2) et que $g(0) = 0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. On en déduit grâce à 10.1 que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = \frac{\pi^2}{4} + 0 = \frac{\pi^2}{4}$.

Conclusion : h est constante sur $]0,+\infty[$ et vaut $\dfrac{\pi^2}{4}$.

10.4.

10.4.1. $\dfrac{1}{(1+x^2T)(1+T)} = \dfrac{1}{1-x^2}\left(\dfrac{1}{1+T} - \dfrac{x^2}{1+x^2T}\right)$.

10.4.2. D'après 10.2, $g'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+(xt)^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$. On effectue le changement de variables $u = t^2$ (qui est bien C^1 et bijectif de $[0,+\infty[$ dans lui-même).

$g'(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2u)(1+xu)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2(1-x^2)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+u} - \frac{x^2}{1+x^2u}\right)\mathrm{d}u$

donc $g'(x) = \dfrac{1}{2(1-x^2)}\left[\ln(1+u) - \ln(1+x^2u)\right]_{u=0}^{+\infty} = \dfrac{1}{2(1-x^2)}\left[\ln\dfrac{1+u}{1+x^2u}\right]_{u=0}^{+\infty}$

donc $g'(x) = \dfrac{1}{2(1-x^2)}\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2(x^2-1)}\ln\left(x^2\right) = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$.

10.4.3. D'après 10.2, g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, donc g' est continue sur $]0,+\infty[$, donc $g'(1) = \lim\limits_{x\to1} g'(x) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$.

Or $\ln x \underset{x\to1}{\sim} (x-1)$ et $x^2-1 = (x-1)(x+1) \underset{x\to1}{\sim} 2(x-1)$ donc $g'(x) \underset{x\to1}{\sim} \dfrac{x-1}{2(x-1)} \xrightarrow[x\to1]{} \dfrac{1}{2}$ donc $g'(1) = \dfrac{1}{2}$.

10.5. Il est bien connu que $\ln x$ a le même signe de $x-1$, donc que x^2-1. On en déduit que sur $]0,+\infty[$, g est strictement croissante. Et comme g est continue sur $\mathbb{R}$ et impaire (question 6), elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ses limites en l'infini ont été calculées en 10.1 : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{\pi^2}{4}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\dfrac{\pi^2}{4}$ par imparité.

Enfin, pour $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2-1} \xrightarrow[x\to0_+]{} +\infty$ donc d'après le th. de limite de la dérivée, g n'est pas dérivable en 0, néanmoins sa courbe représentative possède à l'origine une tangente verticale.

Exercice 2

Questions préliminaires

1. Par linéarité de l'intégrale, $\overline{\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t} = \overline{\displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^{2\pi} h(t)\,\mathrm{d}t}$. Or g et h sont à valeurs réelles donc les intégrales $\displaystyle\int_0^{2\pi} g$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} h$ sont réelles, donc $\overline{\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t} = \displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\int_0^{2\pi} h(t)\,\mathrm{d}t$, et par linéarité de l'intégrale encore, $\overline{\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t} = \displaystyle\int_0^{2\pi}(g(t) - \mathrm{i}h(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$.
2. Si $\forall z \in \mathbb{U} \quad P(z) = 0$, alors P possède une infinité de racines, donc P est le polynôme nul (cours de Première Année).
3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $|z|^2 = z\overline{z}$, donc $|z| = 1$ si et seulement si $z\overline{z} = 1$, c'est-à-dire $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.
4. $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = 1 + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1 + i(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = (1-\sin\theta) + \mathrm{i}\cos\theta$, donc $\mathrm{Re}(\overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}) = 1 - \sin\theta$ et $\mathrm{Im}(\overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}) = -\cos\theta$.
5. A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, donc son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$, donc A est trigonalisable. Elle est donc semblable à une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale contient les valeurs propres de A, apparaissant chacune avec leur ordre de multiplicité. Or deux matrices semblables ont la même trace, donc $\mathrm{tr}(A)$ est la somme des valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité.

*****

Soit n un entier naturel non nul.

6.

6.1. $\varphi(X^k, X^\ell) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ell-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

Si $k = \ell$, alors $\varphi(X^k, X^\ell) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\theta = 1$.

Si $k \neq \ell$, alors $\varphi(X^k, X^\ell) = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ell-k)\theta}}{\mathrm{i}(\ell-k)}\right]_{\theta=0}^{2\pi} = 0$, car la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{it}$ est 2π-périodique.

6.2.

— Par linéarité de l'intégrale et la relation $\overline{aP+Q} = \overline{a}\overline{P} + \overline{Q}$, il est clair que $\varphi(aP+Q, R) = \overline{a}\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)$

— De même $\varphi(P, aQ+R) = a\varphi(P,Q) + \varphi(P,R)$

— Grâce à la question 1, $\overline{\varphi(P,Q)} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\overline{\overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}Q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\overline{Q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\,\mathrm{d}\theta = \varphi(Q,P)$.

6.3. $\varphi(P,P) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{P(e^{i\theta})}P(e^{i\theta})\,d\theta = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|P(e^{i\theta})\right|^2\,d\theta$ est une intégrale d'une fonction à valeurs réelles positives, donc $\varphi(P,P) \in \mathbb{R}_+$.

6.4. Si $P=0$, alors il est évident que $\varphi(P,P)=0$.

Réciproquement, si $\varphi(P,P)=0$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|P(e^{i\theta})\right|^2\,d\theta = 0$; or la fonction $\theta \mapsto \left|P(e^{i\theta})\right|^2$ est continue et positive, donc d'après un th. du cours (th. de stricte positivité de l'intégrale), cette fonction est nulle sur $[0,2\pi]$, donc le polynôme P est nul d'après la question 2.

6.5.

6.5.1. $\varphi(Q_0,Q_0) = \varphi(Q_0, X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k) = \varphi(Q_0,X^n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi(Q_0,X^k)$ en utilisant 6.2.2ème point.

Puis $\varphi(Q_0,X^k) = \varphi(X^n + \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell X^\ell, X^k) = \varphi(X^n,X^k) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \overline{a_\ell}\varphi(X^\ell,X^k)$ en utilisant 6.2.1-er point.

Donc $\varphi(Q_0,Q_0) = \varphi(X^n,X^n) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k\varphi(X^n,X^k) + \sum_{\ell=0}^{n-1}\overline{a_\ell}\varphi(X^\ell,X^n) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(a_k\sum_{\ell=0}^{n-1}\overline{a_\ell}\varphi(X^\ell,X^k)\right)$.

D'après 6.1, pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\varphi(X^n,X^k)=0$ et pour $\ell \in [\![0,n-1]\!]$, $\varphi(X^\ell,X^n)=0$ et $\varphi(X^n,X^n)=1$, donc $\varphi(Q_0,Q_0) = 1 + \displaystyle\sum_{0\leqslant k,\ell\leqslant n-1} a_k\overline{a_\ell}\varphi(X^\ell,X^k)$.

Toujours d'après 6.1, les termes de cette somme double sont nuls quand $k \neq \ell$, donc il reste $\varphi(Q_0,Q_0) = 1 + \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} a_k\overline{a_k}\varphi(X^k,X^k) = 1 + \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}|a_k|^2$.

6.5.2. Pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, $|Q_0(e^{i\theta})|^2 \leqslant M$ par définition de M, donc par croissance de l'intégrale, $\varphi(Q_0,Q_0) \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} M\,d\theta = M$.

Or d'après 6.5.1, $1 \leqslant 1 + \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}|a_k|^2 = \varphi(Q_0,Q_0)$, donc $1 \leqslant M$.

6.5.3. Si $Q_0 = X^n$, alors il est évident que $M=1$, car pour tout $z \in \mathbb{U}$, $|Q_0(z)|^2 = |z^n|^2 = |z|^{2n} = 1$.

Réciproquement, si $M=1$, alors d'après la question 6.5.3, on a la double inégalité $1 \leqslant \varphi(Q_0,Q_0) \leqslant 1$, donc $\varphi(Q_0,Q_0)=1$, donc $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}|a_k|^2 = 0$: il s'agit d'une somme nulle de termes tous positifs ou nuls, donc tous les termes sont nuls, autrement dit $Q_0 = X^n$.

Exercice 3

Questions de cours

1.

1.1. On pose $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ de sorte de $\omega = a\omega + b$. Alors en soustrayant les deux égalités, on obtient la relation de récurrence $u_{n+1} - \omega = a(u_n - \omega)$.

La suite $(u_n - \omega)$ est donc géométrique de raison 1, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - \omega = a^{n-1}(u_1 - \omega)$, autrement dit $u_n = \dfrac{b}{1-a} + a^{n-1}\left(u_1 - \dfrac{b}{1-a}\right)$.

1.2. Si $|a| < 1$, alors u converge vers $\dfrac{b}{1-a}$. Sinon elle diverge.

*****

2. Si $n > N$, dans le meilleur des cas, on peut remplir toutes les cases, donc la valeur maximale de T_n est N.

Si $n \leqslant N$, alors dans le meilleur des cas, on ne peut remplir que n cases (1 boule par case), donc la valeur maximale de T_n est n.

Et bien sûr, au moins une case est remplie donc dans les deux cas, en notant Ω l'espace probabilisé sur lequel T_n est définie, $T_n(\Omega) = [\![1, \min(n,N)]\!]$ (les cas intermédiaires sont évidemment possibles).

3. Avec une seule boule, on remplit toujours une seule case : T_1 est la variable aléatoire certaine 1.

Dans toute la suite, je note B_k la variable aléatoire égale au numéro de la case dans laquelle tombe la k-ème boule. Par hypothèse, les variables $(B_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont indépendantes et suivent toutes la loi uniforme $\mathscr{U}([\![1,N]\!])$.

Avec deux boules (et comme $N \geqslant 2$), on peut remplir une ou deux cases : $T_2(\Omega) = \{1,2\}$.

On peut décrire l'événement $\{T_2 = 1\}$ à l'aide de B_1 et B_2 : $\{T_2 = 1\} = \displaystyle\bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant N}\{B_1 = i\}\cap\{B_2 = i\}$.

Donc $\mathbb{P}(T_2 = 1) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} \mathbb{P}(\{B_1 = i\} \cap \{B_2 = i\}) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} \mathbb{P}(B_1 = i) \times \mathbb{P}(B_2 = i)$ par indépendance.

Donc $\mathbb{P}(T_2 = 1) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^2} = N \times \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N}$. Par conséquent, $\mathbb{P}(T_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(T_2 = 1) = 1 - \frac{1}{N}$.

Pour la suite, on prendra $n \geqslant 2$.

4. De même, $\mathbb{P}(T_n = 1) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(B_1 = i, B_2 = i, \dots, B_n = i) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(B_1 = i)\mathbb{P}(B_2 = i)\dots\mathbb{P}(B_n = i)$ par indépendance, donc $\mathbb{P}(T_n = 1) = \frac{1}{N^{n-1}}$.

Si l'événement $\{T_n = 2\}$ est réalisé, alors je note $i < j$ les numéros des deux cases non vides. Les boules se partagent donc en deux ensembles complémentaires : celles qui sont tombées dans la case i et celles dans la case j. Je note K l'ensemble des numéros des boules qui sont tombées dans la case i : c'est un sous-ensemble de $[\![1, n]\!]$ qui est non vide (au moins une boule est tombée dans la case i) et différent de $[\![1, n]\!]$ (au moins une boule est tombée dans la case j). Je note donc $\mathscr{P}_n$ l'ensemble de ces parties K.

L'événement $\{T_n = 2\}$ peut donc s'écrire sous la forme :

$$\{T_n = 2\} = \bigsqcup_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \bigsqcup_{K \in \mathscr{P}_n} \left(\bigcap_{k \in K} \{B_k = i\} \cap \bigcap_{k \notin K} \{B_k = j\} \right)$$

Donc toujours par indépendance,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n = 2) &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \sum_{K \in \mathscr{P}_n} \left(\prod_{k \in K} \mathbb{P}(B_k = i) \times \prod_{k \notin K} \mathbb{P}(B_k = j) \right) \\ &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \sum_{K \in \mathscr{P}_n} \frac{1}{N^n}\end{aligned}$$

Or $\mathscr{P}_n$ est de cardinal $2^n - 2$ (il y a 2^n parties dans un ensemble à n éléments, mais on retire la partie vide et l'ensemble tout entier) et il y a $\frac{N(N-1)}{2}$ couples (i, j) tels que $1 \leqslant i < j \leqslant N$.

Donc $\mathbb{P}(T_n = 2) = \frac{N(N-1)}{2} \times (2^n - 2) \times \frac{1}{N^n} = \frac{(N-1)(2^{n-1} - 1)}{N^{n-1}}$

5. Si $n \leqslant N$**,** alors l'événement $\{T_n = n\}$ est réalisé lorsque les n boules tombent toutes dans des cases différentes : je note $i_1, \dots, i_n$ les numéros des cases non vides et $k_1, \dots, k_n$ les numéros tous différents des boules tels que la boule k_p tombe dans la case i_p pour tout $p \in [\![1, n]\!]$.

$$\{T_n = n\} = \bigsqcup_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_n \leqslant N} \bigsqcup_{(k_1, \dots, k_n)} \left(\bigcap_{p=1}^{n} \{B_{k_p} = i_p\} \right)$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n = n) &= \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_n \leqslant N} \sum_{(k_1, \dots, k_n)} \left(\prod_{p=1}^{n} \mathbb{P}(B_{k_p} = i_p) \right) \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_n \leqslant N} \sum_{(k_1, \dots, k_n)} \frac{1}{N^n} \\ &= \binom{N}{n} \times n! \times \frac{1}{N^n}\end{aligned}$$

car il y a $\binom{N}{n}$ suites strictement croissantes d'indices $1 \leqslant i_1 < \dots < i_n \leqslant N$ (ce qui revient à dénombrer les parties à n éléments dans un ensemble à N éléments) et $n!$ façons de choisir $(k_1, \dots, k_n)$ tous distincts dans $[\![1, n]\!]$ (ce qui revient à dénombrer les permutations d'un ensemble à n éléments).

Donc $\mathbb{P}(T_n = n) = \binom{N}{n} \times n! \times \frac{1}{N^n} = \frac{N!}{(N-n)!N^n} = \frac{(N-1)!}{(N-n)!N^{n-1}}$.

Si $n > N$**,**, alors $\{T_n = n\} = \varnothing$ d'après la question 2, donc $\mathbb{P}(T_n = n) = 0$.

6. On précise les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{(T_n = \ell)}(T_{n+1} = k)$. Si l'événement $\{T_n = \ell\}$ est réalisé, alors après n lancers, on a rempli ℓ cases, donc seuls deux cas peuvent survenir au lancer suivant :

— soit la boule numéro $n + 1$ retombe dans l'une des cases déjà remplies et dans ce cas, $T_{n+1} = T_n = \ell$;

— soit la boule numéro $n+1$ tombe dans une case vide et dans ce cas, $T_{n+1} = T_n + 1 = \ell + 1$.

Donc pour tout $(\ell, k) \in [\![1, \min(n,N)]\!]^2$, $\mathbb{P}_{(T_n=\ell)}(T_{n+1} = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin \{\ell, \ell+1\} \\ \dfrac{\ell}{N} & \text{si } k = \ell \\ \dfrac{N-\ell}{N} & \text{si } k = \ell + 1 \end{cases}$

La famille des événements $(\{T_n = \ell\})_{1 \leqslant \ell \leqslant n}$ est un système complet d'événements (car $n \geqslant \min(n,N)$), donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{n+1} = k) &= \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}_{(T_n=\ell)}(T_{n+1} = k) \times \mathbb{P}(T_n = \ell) \\ &= \mathbb{P}_{(T_n=k)}(T_{n+1} = k) \times \mathbb{P}(T_n = k) + \mathbb{P}_{(T_n=k-1)}(T_{n+1} = k) \times \mathbb{P}(T_n = k-1) \\ &= \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-(k-1)}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1) = \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1). \end{aligned}$$

Cette égalité est valable pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, même si k ou $k-1$ dépasse N, les probabilités correspondantes étant nulles dans ces cas.

7.

7.1. D'après la question 2, si $k > n$, alors $k \notin T_n(\Omega)$ donc $\mathbb{P}(T_n = k) = 0$. Donc $G_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T_n = k)x^k$.

7.2. Sachant que 0 n'est pas une valeur de T_n, on peut commencer les sommes au rang 1 :

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(T_{n+1} = k)x^k = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1) \right) x^k \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\mathbb{P}(T_n = k)x^k + \sum_{k=1}^{n+1} (N-k+1)\mathbb{P}(T_n = k-1)x^k \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\mathbb{P}(T_n = k)x^k + \sum_{j=0}^{n} (N-j)\mathbb{P}(T_n = j)x^{j+1} \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(T_n = k)x^k + \sum_{k=1}^{n} (N-k)\mathbb{P}(T_n = k)x^{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^{n} \left[k\mathbb{P}(T_n = k)x^k + (N-k)\mathbb{P}(T_n = k)x^{k+1} \right] \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^{n} \left[k\mathbb{P}(T_n = k)(x^k - x^{k+1}) + N\mathbb{P}(T_n = k)x^{k+1} \right] \right) \\ &= \frac{1}{N} \left((x - x^2) \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(T_n = k)x^{k-1} + Nx \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_n = k)x^k \right) \\ &= \frac{1}{N} \left((x-x^2)G_n'(x) + Nx\,G_n(x) \right) \\ &= \frac{1}{N}(x-x^2)G_n'(x) + xG_n(x) \end{aligned}$$

7.3. On dérive l'expression précédente :

$$G_{n+1}'(x) = \frac{1}{N}(1-2x)G_n'(x) + \frac{1}{N}(x-x^2)G_n''(x) + G_n(x) + xG_n'(x)$$

Or $G_n(1) = 1$ et $G_n'(1) = \mathbb{E}(T_n)$ (d'après le cours) donc en évaluant en 1, on obtient

$$\mathbb{E}(T_{n+1}) = \frac{-1}{N}\mathbb{E}(T_n) + 1 + \mathbb{E}(T_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}(T_n) + 1.$$

7.4. On reconnaît une suite arithmético-géométrique et donc selon la question 1, avec $a = 1 - \dfrac{1}{N}$ et $b = 1$, on a :

$$\mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{N})} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{1-(1-\frac{1}{N})}\right) = N - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} \times (N-1)$$

En particulier, $\mathbb{E}(T_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} N$.

7.5. On remarque que $T_n = \sum_{i=1}^{N} X_i$ donc $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(X_i)$ par linéarité de l'espérance.

Or les variables de Bernoulli X_i sont (indépendantes et) identiquement distribuées donc $\mathbb{E}(T_n) = N\mathbb{E}(X_1) = N\mathbb{P}(X_1 = 1) = N(1 - \mathbb{P}(X_1 = 0))$.

Il est facile de vérifier que $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \dfrac{(N-1)^n}{N^n}$ puisque la case 1 est vide si et seulement si les boules se sont réparties dans les $N-1$ autres cases (ce qui donne $(N-1)^n$ répartitions acceptables sur les N^n possibles).

Donc on retrouve $\mathbb{E}(T_n) = N\left(1 - \dfrac{(N-1)^n}{N^n}\right) = N - N\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n = N - N\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^{n-1} = N - \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^{n-1} \times (N-1)$

Exercice 4

1. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont des matrices équitables.

2. Si A et $-A$ sont équitables, alors pour tout $(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$, $a_{ij} = a_{ik}a_{kj} = (-a_{ik}) \times (-a_{kj}) = -a_{ij}$ donc $a_{ij} = 0$.
Réciproquement la matrice nulle est équitable. Donc la seule solution est la matrice nulle.

3. Si A est équitable, alors on note $A^\top = (a'_{ij})$ où pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a'_{ij} = a_{ji}$.
Soit $(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$, $a'_{ij} = a_{ji} = a_{jk}a_{ki} = a'_{kj}a'_{ik}$ donc $a'_{ij} = a'_{ik}a'_{kj}$.
La matrice $A^\top$ est donc équitable.

4. Si A est équitable, alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ii} = a_{ij}a_{ji} = a_{ji}a_{ij} = a_{jj}$.

On suppose désormais que A est une matrice équitable non nulle.

5. Comme A est non nulle, il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $a_{ij} \neq 0$.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$, $a_{kk} = a_{kk}a_{kk}$ donc $a_{kk} = 0$ ou $a_{kk} = 1$.
Or $a_{ij} = a_{ik}a_{kj} = (a_{ik}a_{kk})a_{kj} \neq 0$ donc $a_{kk} \neq 0$, donc $a_{kk} = 1$.
La diagonale de A est entièrement remplie de 1.

6. Si B est une matrice équitable non nulle, alors sa diagonale ne contient que des 1 et celle de A aussi, donc la diagonale de $A+B$ ne contient que des 2, donc d'après la question précédente, par contraposée, puisque $A+B$ n'est pas nulle, elle n'est pas équitable.

7. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ii} = 1 = a_{ij}a_{ji}$ donc $a_{ij} \neq 0$.

8. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = a_{i1}a_{1j}$, or $a_{jj} = 1 = a_{1j}a_{j1}$ donc $a_{ij} = \dfrac{a_{i1}}{a_{j1}}$.
Remarque : au passage, ceci prouve que $a_{ji} = \dfrac{a_{j1}}{a_{i1}} = \dfrac{1}{a_{ij}}$.

9. Quelques résultats remarquables

9.1. D'après la question 8, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{ij} = \dfrac{1}{a_{j1}}a_{i1}$.
La proposition « pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{ij} = \dfrac{1}{a_{j1}}a_{i1}$ » signifie que la colonne j de A est égale au produit de la colonne 1 par le facteur $\dfrac{1}{a_{j1}}$, donc comme ceci est vrai pour tout j, les colonnes de A sont toutes colinéaires et puisque A est non nulle, elle est donc de rang 1.

9.2. On pose $B = A^2 = (b_{ij})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij} = na_{ij}$.
Ceci prouve que $A^2 = nA$.

9.3. La matrice A annule le polynôme $X^2 - nX = X(X-n)$ qui est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

9.4. A étant de rang 1, la dimension de son noyau est $n-1$ d'après le th. du rang, autrement dit 0 est valeur propre de A, et d'ordre exactement $n-1$ puisque A est diagonalisable.
Comme A est non nulle, elle possède une autre valeur propre qui doit être racine du polynôme annulateur précédent : il s'agit de n, qui est donc valeur propre d'ordre 1, puisque la somme des ordres de multiplicité des valeurs propres d'une matrice diagonalisable est n.
Donc A est semblable à $\mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0)$.

9.5. La matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1 est clairement équitable et non nulle, donc d'après ce qui précède, elle est aussi semblable à $\mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0)$. Or la relation de similitude est une relation d'équivalence donc par symétrie et transitivité, A et J sont semblables.

10. Si A est symétrique, alors d'après la remarque faite en question 8, pour tout (i,j), $a_{ij} = \dfrac{1}{a_{ji}} = a_{ji}$ donc $a_{ji}^2 = 1$ donc A est à coefficients dans $\{-1,1\}$.
Réciproquement, si pour tout (i,j), $a_{ij} \in \{-1,1\}$, alors d'après la remarque de la question 8, a_{ji} est l'inverse de a_{ij}. Or pour tout $x \in \{-1,1\}$, $\dfrac{1}{x} = x$ donc $a_{ji} = a_{ij}$. La matrice A est donc symétrique.

11. Si A est une matrice équitable symétrique non nulle, alors d'après la question 9.1, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, la colonne j de A, notée C_j, est égale à $\dfrac{1}{a_{j1}}C_1$.
Les coefficients de A s'expriment tous en fonction de ceux de la première colonne, donc il suffit de connaître la première colonne pour connaître A. Or cette première colonne est du type $\begin{pmatrix} 1 \\ ? \\ \vdots \\ ? \end{pmatrix}$ où les ? symbolisent des 1 ou des -1. Comme il y a deux choix possibles pour chaque ?, il y a donc 2^{n-1} premières colonnes possibles pour A.
On en conclut que le cardinal de l'ensemble des matrices équitables symétriques non nulles est égal à 2^{n-1}, puisque tous les choix possibles de la première colonne donnent une matrice acceptable d'après la question 10.

12. Soit G un sous-groupe fini de cardinal p du groupe $(\mathbb{K}^*, \times)$.
Soit A une matrice équitable à coefficients dans G. D'après la question 9.1, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, la colonne j de A, notée C_j, est égale à $\dfrac{1}{a_{j1}}C_1$. Il suffit donc de connaître la première colonne de A pour connaître A.
On note cette première colonne $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ où $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont $n-1$ éléments de G. Par convention, on pose aussi $\alpha_1 = 1$. On a donc $a_{ij} = \dfrac{1}{\alpha_j}\alpha_i$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
Réciproquement, si on définit ainsi une matrice A, elle est à coefficients dans G puisque G est stable par produit et inversion. Enfin, on vérifie qu'elle est bien équitable (et non nulle bien sûr) :
soit $(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$, $a_{ij} = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_j}$ et $a_{ik}a_{kj} = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_k} \times \dfrac{\alpha_k}{\alpha_j}$, donc on obtient bien $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$.
En conclusion, tous les choix de première colonne sont possibles, on obtient donc p^{n-1} matrices équitables à coefficients dans G.

13. Les matrices carrées équitables de taille 2 à coefficients dans le groupe $\mathbb{U}_2 = \{-1,+1\}$ sont d'après la question 10 des matrices symétriques : on a donc 2 possibilités
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.