SESSION 1995

GROUPE CONCOURS POLYTECHNIQUES

P05

EPREUVE COMMUNE AUX CONCOURS
PH-M, PH-P, CH-P, CH-P'

Cette épreuve est également utilisée par : ISIMA - ECOLE NAVALE

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Durée : 3 heures

Objectifs :
Le but de ce problème est d'abord d'étudier la convergence d'une méthode de projection orthogonale pour la résolution itérative d'un système d'équations linéaires à coefficients réels.
Dans la dernière partie, on verra comment on peut placer cette étude dans le cadre plus général des itérations affines dans $\mathbb{C}^n$ et on étudiera la convergence d'une suite définie par une itération affine quelconque.

Notations :
Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n désignera un entier supérieur ou égal à 2.
Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On désignera par I la matrice identité d'ordre n.
On utilisera la même notation pour désigner un vecteur de $\mathbb{K}^n$ et sa représentation dans la base canonique, matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant n lignes et 1 colonne (élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).
On notera $||x||$ la norme euclidienne (respectivement hermitienne) d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ (respectivement de $\mathbb{C}^n$).

On rappelle que l'application :

$$|||\cdot||| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$M \longmapsto |||M||| = \sup_{x\neq 0} \frac{||Mx||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||Mx||$$

définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui vérifie de plus :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ |||MN||| \leq |||M|||\,|||N|||;$$
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists y \in \mathbb{K}^n, ||y|| = 1, ||My|| = |||M|||.$$

Dans la suite du problème, on considèrera $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de la structure d'espace vectoriel normé associée à cette norme.

1 La méthode de Kacmarz.

Dans toute la suite, A est un élément **inversible** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, b un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$. Pour i variant de 1 à n, on note l_i le vecteur dont les composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont les éléments de la i-ème ligne de A, et b_i la i-ème coordonnée de b dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
L'unique solution, notée x^*, du système $Ax = b$ est donc l'intersection des n hyperplans affines de $\mathbb{R}^n$:

$$H_i = \{z \in \mathbb{R}^n,\ {}^t l_i z = b_i\}.$$

Nous allons définir une méthode itérative pour résoudre le système $Ax = b$ et étudier sa convergence.

Partant de x_0 quelconque dans $\mathbb{R}^n$, la méthode consiste

- à projeter orthogonalement x_0 sur H_1, d'où x_1,
- à projeter orthogonalement x_1 sur H_2, d'où x_2,

  ⋮

- à projeter orthogonalement x_{n-1} sur H_n, d'où x_n,

et à recommencer (x_n est projeté orthogonalement sur H_1, d'où x_{n+1}, etc ...).

Question 1.1
Montrer que l'on peut se ramener, sans restriction de généralité, au cas où les vecteurs l_i sont de norme euclidienne 1.

Dans la suite, on suppose que : $\forall i \in [1, n], \quad ||l_i|| = 1.$

Question 1.2
Soit l un vecteur de $\mathbb{R}^n$, vérifiant $||l|| = 1$. Soit c un réel. Expliciter la projection orthogonale $\overline{x}$ d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ sur l'hyperplan affine H, défini par $H = \{z \in \mathbb{R}^n, {}^t l z = c\}$. Evaluer le coût de ce calcul, c'est-à-dire compter le nombre d'opérations élémentaires (additions et multiplications de nombres réels) effectuées.

Question 1.3
On suppose que les déclarations suivantes ont été effectuées :

```
CONST
      n = 50 ; (* par exemple *)
TYPE
      VECTEUR = ARRAY[1..n] OF REAL;
```

Ecrire la procédure suivante :
Projection(VAR x : VECTEUR ; l : VECTEUR ; c : REAL);
(Transforme le vecteur x de $\mathbb{R}^n$ en sa projection orthogonale $\overline{x}$ sur l'hyperplan affine H, défini par $H = \{z \in \mathbb{R}^n, {}^t l z = c\}$. On suppose que $||l|| = 1$. *)*

Question 1.4
Déduire de la question 1.2 :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = (I - l_i\,{}^t l_i)x_k + b_i l_i, \quad (k+1 = i \bmod n).$$

On posera :

$$T_i = I - l_i\,{}^t l_i, \quad h_i = b_i l_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$
$$\epsilon_k = x_k - x^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Question 1.5
Montrer que l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \epsilon_{k+1} = T_i \epsilon_k, \quad (k+1 = i \bmod n).$$

Question 1.6
*On suppose que les vecteurs l_i sont **orthonormés**.*
Montrer que $I = \sum_{i=1}^{n} l_i\,{}^t l_i$.
En déduire que la méthode permet de calculer x^*, quel que soit x_0, en au plus n projections. Quel est le coût total maximum de la méthode dans ce cas ?

Question 1.7
Vérifier que l'on a également $x^* = {}^t A b$. Quel est le coût du calcul de x^* par cette formule ?

2 Cas où les l_i ne sont pas orthogonaux.

Dans cette partie, on étudie la convergence de la méthode dans le cas où les vecteurs l_i (**normés**) **ne sont pas** deux à deux **orthogonaux**.
On définit alors une nouvelle suite (y_k) dans $\mathbb{R}^n$ de la façon suivante :

$$y_k = x_{nk}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

et l'on pose :

$$\eta_k = y_k - x^*, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$
$$T = T_n T_{n-1} \dots T_1.$$

Question 2.1
Montrer que la suite (η_k) vérifie :

$$\eta_{k+1} = T\eta_k = T^{k+1}(x_0 - x^*), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Question 2.2
Montrer que T_i est symétrique et que $T_i^2 = T_i$, $\forall i \in [1, n]$.

Question 2.3
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres des matrices T_i, $(i = 1, \dots, n)$.

Question 2.4
Montrer que T_i est l'opérateur de projection orthogonale sur l'hyperplan $\{l_i\}^\perp$, calculer $|||T_i|||$ et en déduire que $|||T||| \leq 1$.

Question 2.5
Montrer que pour tout vecteur x non nul de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$||T_i x|| < ||x||, \quad \text{sauf si } x \in \{l_i\}^\perp.$$

En déduire que pour tout vecteur x non nul de $\mathbb{R}^n$,

$$||T_n T_{n-1} \dots T_1 x|| < ||x||,$$

sauf si les conditions (C) suivantes sont vérifiées :

$$\left.\begin{array}{rl} x & \text{est orthogonal à } l_1, \\ T_1 x & \text{est orthogonal à } l_2, \\ & \vdots \\ T_{n-1} \dots T_1 x & \text{est orthogonal à } l_n. \end{array}\right\} \quad (C)$$

Question 2.6
Montrer que les conditions (C) impliquent $x = 0$.

Question 2.7
En déduire que $|||T||| < 1$.

Question 2.8
Prouver enfin que la suite (y_k) converge vers x^* quel que soit y_0 $(= x_0)$ dans $\mathbb{R}^n$.

Question 2.9
Montrer alors que la suite (x_k) elle-même converge vers x^*, quel que soit x_0 dans $\mathbb{R}^n$.

Question 2.10
Montrer que la convergence de la suite (ϵ_k) (définie dans la partie 1) vers 0 satisfait à une inégalité de la forme :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in [0, n-1], \quad ||\epsilon_{nk+i}|| \leq C^k ||\epsilon_i||,$$

où C est une constante appartenant à $[0, 1[$.

3 Itérations affines dans $\mathbb{C}^n$.

Soit (z_k) une suite dans $\mathbb{C}^n$. On dit que la suite (z_k) est définie par une **itération affine** si et seulement si :

$$\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists h \in \mathbb{C}^n,\ z_{k+1} = M z_k + h, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Question 3.1
Parmi les suites (x_k), (ϵ_k), (y_k), (η_k), introduites précédemment, quelles sont celles qui sont définies par une itération affine ?

Dorénavant, on se donne une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, deux vecteurs h et z_0 dans $\mathbb{C}^n$ et la suite (z_k) définie par l'itération affine :

$$(ITER) \qquad z_{k+1} = M z_k + h, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

L'itération $(ITER)$ sera dite **convergente vers** z^* si quel que soit z_0 dans $\mathbb{C}^n$, la suite (z_k) converge dans $\mathbb{C}^n$ vers une limite z^* **indépendante de** z_0.

Question 3.2
Montrer que :

$$z_{k+1} = (I + M + \ldots + M^k)h + M^{k+1} z_0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Question 3.3
Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- *a) la suite $|||M^k|||$ converge vers 0 lorsque k tend vers l'infini ;*
- *b) $I - M$ est inversible et la série $\sum_{k=0}^{\infty} M^k$ converge vers $(I - M)^{-1}$.*

Question 3.4
Montrer que les propositions équivalentes a) et b) énoncées ci-dessus sont encore équivalentes à la proposition c) suivante :

- *c) l'itération $(ITER)$ est convergente vers z^*.*

Question 3.5
Vérifier qu'alors $z^* = (I - M)^{-1}h$.

Question 3.6
Expliquer comment les résultats des deux questions précédentes s'appliquent dans la partie 2 et permettent de répondre à la question 2.8. à partir de la conclusion établie à la question 2.7. La condition $|||M||| < 1$ est-elle équivalente aux conditions a), b) et c) ?

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de M. On appelle *rayon spectral* de la matrice M le nombre réel $\rho(M) = \sup_{i=1,\ldots,p} |\lambda_i|$.

Question 3.7
Montrer que $\rho(M) \leq |||M|||$, avec égalité si M est diagonale.

Pour répondre à la question suivante, on admettra sans démonstration l'existence d'une matrice D diagonale, d'une matrice N triangulaire supérieure à diagonale nulle, et d'une matrice P inversible, éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telles que :

$$M = P^{-1}(D + N)P, \qquad DN = ND.$$

Question 3.8
Montrer que la proposition a) est aussi équivalente à la proposition d) ci-dessous :

- *d) $\rho(M) < 1$.*

Fin de l'énoncé.