

Centrale 2006 -PSI
seconde épreuve : corrigé

Partie I.

A.1. Il s'agit de reprouver un résultat de cours dans le cas particulier de matrices d'ordre 2. Soient

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ des éléments de E . On a

$$AA' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix}$$

On en déduit (vérification simple) que

$$\text{Tr}(AA') = \text{Tr}(A'A) \quad \text{et} \quad \det(AA') = \det(A)\det(A') = \det(A'A)$$

Si $A, B \in E$ sont semblables alors il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$. On a alors

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(P^{-1}BP) = \text{Tr}(BPP^{-1}) = \text{Tr}(B)$$

et de même $\det(A) = \det(B)$. Ainsi, la trace et le déterminant sont des invariants de similitude et (par sa définition) il en est de même du polynôme caractéristique (si A et B sont semblables, $A - xI_2$ et $B - xI_2$ le sont par la même matrice de passage).

La réciproque est fautive puisque I_2 et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables (la seule matrice semblable à I_2 est I_2) mais ont même trace (2) et même polynôme caractéristique $((x-1)^2)$.

A.2. En notant $M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$, on a

$$\text{Tr}({}^tM_1M_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$$

En identifiant E et $\mathbb{R}^4$, ϕ correspond au produit scalaire canonique.

A.3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$. On a

$$\det(M) = ad - bc = \frac{1}{2}\Phi(M, N) \quad \text{avec} \quad N = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Remarque : N est la comatrice de M .

Par inégalité de Cauchy-Schwarz dans E , on a donc

$$|\det(M)| \leq \frac{1}{2}\|M\| \cdot \|N\| = \frac{1}{2}\|M\|^2 = \frac{1}{2}\text{Tr}({}^tMM)$$

Il n'y a égalité que si (M, N) est une famille liée c'est à dire si $M = 0$ ou $N = \lambda M$ avec λ réel.

- $N = \lambda M$ alors $d = \lambda a$ et $a = \lambda d$ et donc $d(1 - \lambda^2) = a(1 - \lambda^2) = 0$ et de même $b(1 - \lambda^2) = c(1 - \lambda^2) = 0$. Si $M \neq 0$ alors $\lambda^2 = \pm 1$ et $\begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = -d \\ b = c \end{cases}$.

- Réciproquement, si ces conditions sont vérifiées alors (M, N) est liée.

Les conditions trouvées englobant le cas de la matrice nulle, il n'y a égalité que pour les matrices du type

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

A.4. Un calcul immédiat donne

$$\chi_M(x) = x^2 - \text{Tr}(M)x + \det(M)$$

1 est valeur propre si et seulement si $\chi_M(1) = 0$ c'est à dire

$$\text{Tr}(M) = 1 + \det(M)$$

B.1. Par théorème généraux (on fait des sommes et des produits de fonctions continues), ϕ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est, comme $\theta \mapsto P(\theta)$, 2π -périodique. Ses bornes sur $\mathbb{R}$ sont donc celle sur le segment $[0, 2\pi]$ et, sur ce segment, la fonction continue est bornée et atteint ses bornes. En particulier ϕ atteint son maximum sur $\mathbb{R}$ en un certain θ_1 .

Par théorèmes généraux, ϕ est dérivable. Comme $\mathbb{R}$ est un ouvert, ϕ atteint son maximum en un point critique et on a donc $\phi'(\theta_1) = 0$. Comme

$$\phi(\theta) = (a + d) \cos(\theta) + (b - c) \sin(\theta)$$

on a donc (en écrivant $\phi'(\theta_1) = 0$)

$$c \cos(\theta_1) + d \sin(\theta_1) = -a \sin(\theta_1) + b \cos(\theta_1)$$

relation qui indique que les coefficients 1, 2 et 2, 1 de $MP(\theta_1)$ sont égaux, c'est à dire que cette matrice est symétrique.

B.2. $MP(\theta_1)$ est donc diagonalisable en base orthonormée (théorème spectral) et il existe une matrice orthogonale (que l'on peut supposer directe quitte à échanger ses colonnes) Q telle que $D = Q^{-1}MP(\theta_1)Q$ soit diagonale. Les éléments de O_2 étant exactement les matrices $P(\theta)$, il existe t tel que $Q = P(\theta)$. On a alors $Q^{-1} = P(-t)$ et

$$M = QDQ^{-1}P(-\theta_1) = P(t)DP(-t - \theta_1)$$

B.3. On a $M_0P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix}$. En choisissant $\theta = -\pi/4$, on obtient la matrice $N_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $(1, -1)$ et $(1, 1)$ sont vecteurs propres pour N_0 et ainsi

$$P(\pi/4)N_0P(-\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalement, on a

$$M_0 = P(-\pi/4) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} P(\pi/2)$$

C. On calcule

$${}^tBB = {}^tV {}^tA {}^tUUA V$$

Comme U et V sont orthogonales, ceci peut s'écrire

$${}^tBB = V^{-1} {}^tAA V$$

ce qui montre que tBB et tAA sont semblables.

Partie II.

- A. Notons $||| \cdot |||$ la norme subordonnée à $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. En identifiant E et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, on obtient aussi une norme sur E . On rappelle que

$$|||M||| = \max_{\substack{X \in \mathbb{R}^2 \\ X \neq 0}} \frac{\|MX\|}{\|X\|}$$

On a donc

$$\mathcal{R} = \{M \in E / |||M||| \leq 1\}$$

- B.1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$. On a alors $\|(a, c)\| = \|M(1, 0)\| \leq \|(1, 0)\| = 1$ et donc $|a|, |c| \leq 1$. De même $|b|, |d| \leq 1$ en prenant l'image par M de $(0, 1)$.
 $\mathcal{R}$ s'interprète immédiatement comme la boule unité fermée de E pour la norme $||| \cdot |||$. C'est donc un compact (fermé borné en dimension finie, la norme étant indifférente).

- B.2. Soient $M_1, M_2 \in \mathcal{R}$ et $t \in [0, 1]$. Par inégalité triangulaire et homogénéité, on a

$$|||(1-t)M_1 + tM_2||| \leq (1-t)|||M_1||| + t|||M_2||| \leq (1-t) + t = 1$$

et donc $(1-t)M_1 + tM_2 \in \mathcal{R}$.

- C.1. Supposons que $M \in \mathcal{R}$. On a alors

$$\forall X \in \mathbb{R}^2, {}^tX^tMMX = {}^t(MX)(MX) = \|MX\|^2 \leq \|X\|^2 = {}^tXX$$

Réciproquement, si cette relation est vérifiée alors $\forall X, \|MX\| \leq \|X\|$ et $M \in \mathcal{R}$.

- C.2.a. tMM est symétrique réelle et donc diagonalisable. En notant λ_1, λ_2 les valeurs propres (éventuellement égales), la matrice est semblable à $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ et son polynôme caractéristique est donc $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$.

En notant X un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i , on a ${}^tMMX = \lambda_i X$ et donc

$$\lambda_i \|X\|^2 = (X|{}^tMMX) = \|MX\|^2 \geq 0$$

et comme $\|X\| \neq 0$ (X est non nul comme vecteur propre), $\lambda_i \geq 0$.

- C.2.b. Si $M \in \mathcal{R}$ alors pour tout X , $\|MX\| \leq \|X\|$ et le calcul précédent indique que $\lambda_i \in [0, 1]$. Réciproquement (et en contraposant), si $\lambda_i \notin [0, 1]$ alors $\lambda_i > 1$ (on sait que $\lambda_i \geq 0$) et, pour X vecteur propre associé, $\|MX\| = \lambda_i \|X\| > \|X\|$ ce qui donne $M \notin \mathcal{R}$.

- D. On garde les notations de C.2.

Si $M \in \mathcal{R}$, on a $\text{Tr}({}^tMM) = \lambda_1 + \lambda_2 \leq 2$. De plus 1 n'est pas entre les racines du polynôme caractéristique P de tMM et donc $P(1) \geq 0$. ceci donne $\text{Tr}({}^tMM) \leq 1 + \det({}^tMM) = 1 + (\det(M))^2$.

Réciproquement, si les relations précédentes sont vérifiées alors $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$ ou $1 \leq \lambda_1, \lambda_2$ (puisque les λ_i sont positifs et que 1 n'est pas entre les deux). Comme $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 2$ on est forcément dans le premier cas et $M \in \mathcal{R}$.

- E.1. Si $M \in \mathcal{S}$ alors $M \in \mathcal{R}$ le polynôme caractéristique de tMM est du type $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ avec $\lambda_i \in [0, 1]$. Soit (X_1, X_2) une base orthonormée de diagonalisation de tMM (il en existe une par théorème spectral). Un élément $X \in \mathbb{R}^2$ s'écrit $a_1 X_1 + a_2 X_2$ et $\|X\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ (car la base est orthonormée). On a $\|MX\| = \|\lambda_1 a_1 X_1 + \lambda_2 a_2 X_2\| = \sqrt{\lambda_1^2 a_1^2 + \lambda_2^2 a_2^2}$. Si (par l'absurde) $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1[$ alors $\forall X \neq 0, \|MX\| < \|X\|$ ce qui contredit $M \in \mathcal{S}$. Le polynôme caractéristique de tMM est donc du type $(x - \lambda)(x - 1)$ avec $\lambda \in [0, 1]$.

Réciproquement, si ceci a lieu alors $M \in \mathcal{R}$ et pour X_0 vecteur propre associé à 1 on a $\|MX_0\| = \|X_0\|$. Ainsi $M \in \mathcal{S}$.

E.2.a. On a

$${}^tMM = P(-t_2)DP(-t_1)P(t_1)DP(t_2) = P(-t_2)D^2P(t_2) = P(t_2)^{-1}D^2P(t_2)$$

tMM est donc semblable à D^2 et ses valeurs propres sont α^2 et β^2 .

E.2.b. Si $M \in \mathcal{S}$ alors $\alpha^2 \in [0, 1]$ et $\beta^2 = 1$. Ainsi $\alpha \in [-1, 1]$ et $\beta = 1$. On a la décomposition voulue avec $\gamma = \alpha$, $U = P(t_1)$ et $V = P(t_2)$.

Réciproquement, si M se décompose ainsi alors (calcul identique à celui de E2a) tMM est semblable à $\text{diag}(\gamma^2, 1)$. D'après E1, $M \in \mathcal{S}$.

E.3. Soit $M \in \mathcal{S}$ et $M = U\text{diag}(\gamma, 1)V$ une décomposition du type précédent. Supposons M non orthogonale. On a alors $\gamma \in]-1, 1[$ (sinon $\gamma = \pm 1$ et M est orthogonale comme produit de matrices orthogonales). Soient $W = UV$ et $W' = U\text{diag}(-1, 1)V$. ce sont des matrices orthogonales (produit de telles matrices) et on a

$$M = (1 - t)W + tW' \quad \text{avec} \quad t = \frac{1 - \gamma}{2} \in [0, 1]$$

F.1. On a

$$E_1 = \text{Vect} \left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

et ce sont donc bien des sous-espaces vectoriels. Ils sont en outre de dimension 2 (les familles génératrices trouvées sont clairement libres). Pour montrer que ces espaces sont supplémentaires dans E , il suffit de montrer qu'ils sont en somme directe et il suffit donc de montrer qu'ils sont orthogonaux (ce seront alors des supplémentaires orthogonaux). On le vérifie en calculant

$$\Phi \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} \right) = 0$$

F.2. Les matrices orthogonales directes sont les $P(\theta)$ et sont donc dans E_1 . Celles indirectes sont les $\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix}$ et sont dans E_2 .

F.3. Soit $M \in E_1 \cap \mathcal{S}$; notons $t = \text{Tr}({}^tMM)$. Comme 1 est valeur propre, IA4 donne $t = 1 + \det(M)^2$. La question IA3 indique que $|\det(M)| = \frac{t}{2}$. On a donc $t = 1 + \frac{t^2}{4}$ c'est à dire $t = 2$. Les calculs de IIC donnent alors ${}^tMM = I_2$ (on doit avoir deux valeurs propres égales à 1) et M est orthogonale.

De la même façon, les éléments de $E_2 \cap \mathcal{S}$ sont des matrices orthogonales.

Soit M une matrice non orthogonale de $\mathcal{S}$.

Si $M = tW + (1 - t)W'$ avec $t \in [0, 1]$ et W, W' orthogonales. W et W' ne sont pas directes toutes deux (car sinon $tw, (1 - t)W \in E_1$ et donc $M \in E_1 \cap \mathcal{S}$ ce qui entraîne son orthogonalité).

De même W et W' ne sont pas indirectes toutes deux. Ainsi $tW \in E_1$ et $(1 - t)W' \in E_2$ (ou l'inverse). Comme M possède une unique décomposition sur $E_1 \oplus E_2$, il y a au plus une choix possible du segment $[W, W']$.

Comme il y a un choix possible, il y en a exactement un.

Partie III.

A.1. Si $M \in \mathcal{S}$ alors 1 est valeur propre de tMM et donc (IA4) ${}^tMM = 1 + \det({}^tMM) = 1 + (\det(M))^2$. Cette relation s'écrit

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 + (ad - bc)^2$$

A.2.a. Supposons cette condition vérifiée. Comme en IIC et IID, on a donc $P(1) = 0$ où P est le polynôme caractéristique de tMM . 1 est donc valeur propre de tMM et $M \in \mathcal{S}$ si et seulement si l'autre valeur propre est inférieure à 1 c'est à dire si et seulement si

$$(\det(M))^2 \leq 1$$

A.2.b. Soit $M \in \mathcal{H}$. Comme ci-dessus, 1 est donc valeur propre de tMM et $M \in \mathcal{S}$ si et seulement si l'autre valeur propre est inférieure à 1. Or cette deuxième valeur propre vaut $Tr({}^tMM) - 1$ et la CNS devient

$$Tr({}^tMM) \leq 2$$

III.B.1. Un calcul immédiat donne

$$\forall (A, B) \in E_1 \times E_2, \det(A + B) = \det(A) + \det(B)$$

III.B.2. Soit $t \in \mathbb{R}$; $(1 - t)W \in E_1$ et $tW' \in E_2$. Soit $M = (1 - t)W + tW'$. La question précédente donne

$$\det(M) = \det((1 - t)W) + \det(tW') = (1 - t)^2 \det(W) + t^2 \det(W') = 1 - 2t$$

Par ailleurs, comme E_1 et E_2 sont orthogonaux, on a (Pythagore)

$$\Phi(M, M) = (1 - t)^2 \Phi(W, W) + t^2 \Phi(W', W') = 2(1 - t)^2 + 2t^2$$

On en déduit que

$$\Phi(M, M) = 1 + (\det(M))^2$$

ce qui traduit que $M \in \mathcal{H}$. La droite (WW') est donc incluse dans $\mathcal{H}$.

Partie IV.

A. On a $\Phi(tM, tM) = t^2 \Phi(M, M) = t^2 Tr({}^tMM) = t^2(\lambda_1 + \lambda_2)$ et $(\det(tM))^2 = t^4(\det(M))^2 = t^4 \lambda_1 \lambda_2$. tM est dans $\mathcal{H}$ si ces quantités sont égales c'est à dire si t^2 est racine de $P = \lambda_1 \lambda_2 X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + 1$.

- Si $\lambda_1 = 0$ (et alors $\lambda_2 \neq 0$ car $M \neq 0$) alors P admet une solution positive et on n'a $tM \in \mathcal{H}$ que pour un choix de $t \geq 0$.
- Sinon, P est de degré 2 et son discriminant vaut $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$. Si $0 < \lambda_1 = \lambda_2$ alors P a une unique racine qui est positive et on n'a $tM \in \mathcal{H}$ que pour un choix de $t \geq 0$. Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ alors P a deux racines positives et on a $tM \in \mathcal{H}$ pour deux valeurs de $t \geq 0$.

Les cas particuliers sont ceux où M n'est pas inversible (0 est valeur propre de tMM) et celui où tMM est une matrice scalaire (deux valeurs propres égales) c'est à dire où M est un multiple d'une matrice orthogonale c'est à dire encore si $M \in E_1$ ou $M \in E_2$.

B.1. $M_1(x, y)$ est orthogonale si ses colonnes forment une base orthonormée c'est à dire si $x^2 = 2$ et $y = 0$. Les matrices orthogonales de P_1 sont donc I_2 et $-I_2$.

B.2.a. $M_1(x, y)$ est dans $\mathcal{H}$ si $x^2 + y^2 = 1 + \frac{x^4}{4}$. Cette condition s'écrit

$$(x^2 + 2y - 2)(x^2 - 2y - 2)$$

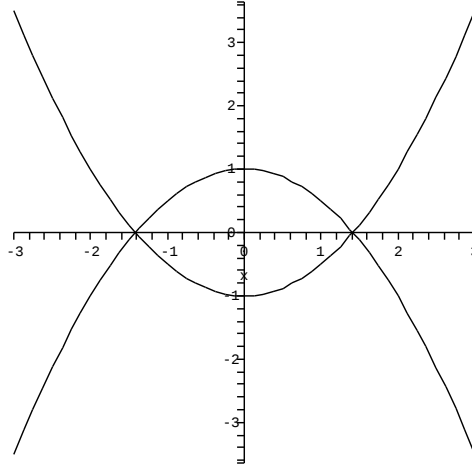
et on obtient la réunion de deux paraboles :

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y) / x^2 + 2y - 2 = 0\} \text{ et } \mathcal{C}_2 = \{(x, y) / x^2 - 2y - 2 = 0\}$$

Un calcul élémentaire donne

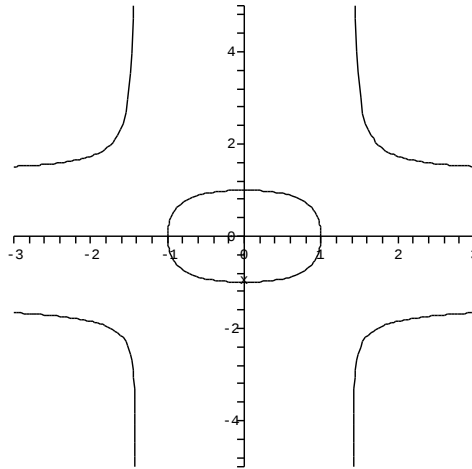
$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)\}$$

B.2.b. La représentation de $\mathcal{H} \cap P_1$ est la suivante.



La partie correspondant à $\mathcal{S} \cap P_1$ est celle pour $x^2 \leq 2$ (on doit ajouter la condition $(\det(M))^2 \leq 1$) ce qui donne la partie “close” du dessin.

C. L'équation s'écrit $y^2(x^2 - 2) = 2x^2 - 2$. Si $x^2 \in]1, 2]$, cette équation n'admet pas de solution. Sinon, il y en a deux $y = \pm \sqrt{2 + \frac{2}{x^2 - 2}}$. Le tracé correspondant est le suivant



La partie correspondant à $\mathcal{S} \cap P_2$ est celle, comme à la question précédente, pour laquelle $(xy)^2 \leq 2$ c'est à dire $x^2 + y^2 \leq 2$. On ne trouve que la partie patatoïde.

D.1. Soit $M \in \mathcal{S}_2$ et λ_1, λ_2 ses valeurs propres. Les valeurs propres de ${}^tMM = M^2$ sont λ_1^2 et λ_2^2 . M est dans $\mathcal{H}$ si et seulement si $\text{Tr}({}^tMM) = 1 + (\det(M))^2$ ce qui s'écrit $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1 + \lambda_1^2\lambda_2^2$ ou encore

$$(1 - \lambda_2^2)(1 - \lambda_1^2) = 0$$

Ceci a lieu si et seulement si 1 ou -1 est valeur propre de M .

D.2. On a

$$M(x, y, z) - aI_2 = \underbrace{xM_1 + yM_2}_{\in E_2} + \underbrace{(z - a\sqrt{2})M_3}_{\in E_1}$$

Avec *III.B.1* on a donc

$$\det(M(x, y, z) - a_2) = \det(xM_1 + yM_2) + (z - a\sqrt{2})^2 \det(M_3) = \frac{1}{2} \left(-x^2 - y^2 + (z - a\sqrt{2})^2 \right)$$

On a donc

$$\mathcal{C}_a = \{M(x, y, z) / x^2 + y^2 = (z - a\sqrt{2})^2\}$$

Avec *D.1* on a donc

$$\mathcal{H} \cap S_2 = C_1 \cup C_{-1} = \{M(x, y, z) / x^2 + y^2 = (z - \sqrt{2})^2 \text{ ou } x^2 + y^2 = (z + \sqrt{2})^2\}$$

D.3. On fait le calcul pour les M_i et on combine les résultats. On obtient

$$N = P(\theta)M(x, y, z)P(\theta)^{-1} = M(u, v, w) \text{ avec } \begin{cases} u = x \cos(2\theta) - y \sin(2\theta) \\ v = x \sin(2\theta) + y \cos(2\theta) \\ w = z \end{cases}$$

D.4. On obtient deux hyperboloïdes.