

I-A) $\varphi : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin^2 x}{x^2}$ est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* . Comme $\sin x \underset{0}{\sim} x$, $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 1$.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } \varphi(0) = 1}$.

Ainsi prolongée la fonction φ est définie, continue et positive sur \mathbb{R} .

Pour montrer qu'elle est intégrable sur \mathbb{R}_+ , il suffit de montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \varphi(x).dx$.

Cette intégrale est simplement impropre en $+\infty$.

$\forall x \in [1, +\infty[$, $\varphi(x) \leq \frac{1}{x^2}$ et on sait que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge.

Par comparaison, $\int_1^{+\infty} \varphi(x).dx$ converge donc $\int_0^{+\infty} \varphi(x).dx$ converge.

Par suite, $\boxed{\varphi \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+}$.

Comme φ est une fonction paire, $\boxed{\varphi \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.

I-B.1) Si $0 < a < b$, la fonction $y \mapsto \frac{\sin y}{y}$ est continue sur $[a, b]$ donc $\int_a^b \frac{\sin y}{y} dy$ est une intégrale définie.

On fait une intégration par parties en posant:
$$\begin{cases} u(y) = \frac{1}{y} & \text{et } v'(y) = \sin y \\ u'(y) = -\frac{1}{y^2} & \text{et } v(y) = 1 - \cos y \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont C^1 sur $[a, b]$ donc $\boxed{\int_a^b \frac{\sin y}{y} dy = \left[\frac{1 - \cos y}{y} \right]_a^b + \int_a^b \frac{1 - \cos y}{y^2} dy}$.

On sait que $1 - \cos y = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)$. Donc $\int_a^b \frac{1 - \cos y}{y^2} dy = \int_a^b \frac{2 \cdot \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}{y^2} dy$.

Le changement de variable $x = \frac{y}{2}$ donne alors $\int_a^b \frac{2 \cdot \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}{y^2} dy = \int_{a/2}^{b/2} \frac{2 \sin^2 x}{4x^2} \times 2 dx = \int_{a/2}^{b/2} \varphi(x).dx$.

Par suite: $\boxed{\int_a^b \frac{\sin y}{y} dy = \left[\frac{1 - \cos y}{y} \right]_a^b + \int_{a/2}^{b/2} \varphi(x).dx}$.

I-B.2) $\rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos y}{y} = 0$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y} = 0$ car $\frac{1 - \cos y}{y} \underset{0}{\sim} \frac{y}{2}$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos y}{y^2} dy$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

\rightarrow La fonction $y \mapsto \frac{y}{2}$ est une bijection de classe C^1 strictement croissante de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R}_+^*

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos y}{y^2} dy$ et $\int_0^{+\infty} \varphi(x).dx$ sont de même nature et égales en cas de convergence

Comme $\int_0^{+\infty} \varphi(x).dx$ converge, $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy \text{ est convergente et } \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \int_0^{+\infty} \varphi(x).dx}$.

→ La fonction φ étant paire, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).dx = 2 \int_0^{+\infty} \varphi(x).dx$.

Par suite,
$$\boxed{2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).dx}$$
.

Note: la formule d'intégration par parties pour les intégrales impropres n'est pas inscrite au programme de la filière TSI.

I-C) La fonction $t \mapsto h(t).e^{itv}$ est continue sur $[\alpha, \beta]$ donc $\int_{\alpha}^{\beta} h(t).e^{itv}.dt$ est une intégrale définie.

On fait une intégration par parties avec
$$\begin{cases} u(t) = h(t) & \text{et} & v'(t) = e^{itv} \\ u'(t) = h'(t) & \text{et} & v(t) = -\frac{i}{v} e^{itv} \end{cases}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(t).e^{itv}.dt = -\frac{i}{v} \left[h(\beta).e^{i\beta v} - h(\alpha).e^{i\alpha v} - \int_{\alpha}^{\beta} h'(t).e^{itv}.dt \right].$$

Comme h est C^1 sur $[\alpha, \beta]$, h' est C^0 sur $[\alpha, \beta]$ donc $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [\alpha, \beta], |h'(t)| \leq M$.

Par suite,
$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} h(t).e^{itv}.dt \right| \leq \frac{1}{|v|} [|h(\beta)| + |h(\alpha)| + M(\beta - \alpha)].$$

On en déduit que:
$$\boxed{\lim_{v \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} h(t).e^{itv}.dt = 0}$$
.

I-D.1) $\forall n \in \mathbb{N}, h_n(t) \underset{0}{\sim} \frac{(2n+1)t}{t} = 2n+1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{t \rightarrow 0} h_n(t) = 2n+1$.

Par suite,
$$\boxed{h_n \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } h_n(0) = 2n+1}$$
.

L'intégrale I_n est faussement impropre en 0 donc
$$\boxed{I_n \text{ est convergente}}$$
.

I-D.2) → $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1.dt$ donc
$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}}$$
.

→ En utilisant la relation $\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+3)t] - \sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt = \int_0^{\pi/2} 2 \cos[(2n+2)t].dt.$$

Donc
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = 0}$$
. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

→ On en déduit que:
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{\pi}{2}}$$
.

I-D.3) $h : t \in]0, \pi/2[\mapsto \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$

a-) $\forall t \in]0, \pi/2[$, $h(t) = \frac{t - \sin t}{t \cdot \sin t}$ donc $h(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^3}{t^2} = \frac{t}{6}$. Par suite:
$$\boxed{h(t) = \frac{t}{6} + o(t)}$$
.

- b-) • La fonction h est définie, continue et dérivable sur $]0, \pi/2]$.
 • h n'est pas définie en 0 mais admet en ce point le développement limité d'ordre 1

$$h(t) = 0 + \frac{1}{6}t + o(t)$$

Par suite: \rightarrow h est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = 0$.

\rightarrow La fonction ainsi prolongée est dérivable en 0 avec $h'(0) = \frac{1}{6}$.

c-) • $\forall t \in]0, \pi/2], h'(t) = -\frac{1}{\sin^2 t} \times \cos t + \frac{1}{t^2}$.

La dérivée de h est donc continue sur $]0, \pi/2]$ donc h est C^1 sur $]0, \pi/2]$.

• Comme $\begin{cases} -t^2 \cdot \cos t + \sin^2 t = -t^2 + \frac{t^4}{2} + t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4) \sim \frac{t^4}{6} \\ t^2 \cdot \sin^2 t \sim t^4 \end{cases}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} h'(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^2 \cdot \cos t + \sin^2 t}{t^2 \cdot \sin^2 t} = \frac{1}{6} = h'(0) \text{ donc } h' \text{ est continue en 0.}$$

Par suite, h est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$.

d-) $\int_0^{\pi/2} \sin[(2n+1)t] \cdot h(t) \cdot dt = \text{Im} \left\{ \int_0^{\pi/2} h(t) \cdot e^{it(2n+1)} \cdot dt \right\}$

Quand n tend vers $+\infty$, $2n+1$ tend aussi vers $+\infty$.

Comme h est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$, le résultat du I-C donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} h(t) \cdot e^{it(2n+1)} \cdot dt = 0$.

On en déduit que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin[(2n+1)t] \cdot h(t) \cdot dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Im} \left(\int_0^{\pi/2} h(t) \cdot e^{it(2n+1)} \cdot dt \right) = 0$.

e-) \rightarrow La fonction $g : t \in]0, \pi/2] \mapsto \frac{\sin[(2n+1)t]}{t}$ est continue

et elle est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 2n+1$.

L'intégrale $\int_0^{\pi/2} \sin[(2n+1)t] \cdot h(t) \cdot dt$ est donc faussement impropre en 0.

Par suite: $\int_0^{\pi/2} \sin[(2n+1)t] \cdot h(t) \cdot dt$ est convergente.

$\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \sin[(2n+1)t] \cdot h(t) \cdot dt$ donc $J_n = I_n - \int_0^{\pi/2} \sin[(2n+1)t] \cdot h(t) \cdot dt$.

Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

\rightarrow • Dans l'intégrale définissant J_n , on fait le changement de variable $u = (2n+1)t$.

Il vient $J_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u} du$

• La fonction $\theta : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \frac{\sin y}{y} \text{ si } y > 0 \\ 0 \mapsto 1 \end{cases}$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

$\Theta : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin y}{y} dy$ est la primitive de θ sur \mathbb{R}_+ qui s'annule en 0.

C'est une fonction continue sur \mathbb{R}_+ .

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy$ converge, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sin y}{y} dy = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy$

- $J_n = \Theta[(2n+1)\pi/2]$. Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Theta[(2n+1)\pi/2]$

se traduit par $\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}$ et on en déduit $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).dx = \pi$.

I-E.1)

- La fonction $x : u \mapsto a(v - u)$ est continue sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} .
Comme la fonction φ est continue sur \mathbb{R} , $\psi_v = a(\varphi \circ x)$ est continue sur \mathbb{R} .
- La fonction x est une bijection de classe C^1 strictement décroissante de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
Le changement de variable $x = a(v - u)$ donne
 $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_v(u).du = - \int_{+\infty}^{-\infty} a.\varphi(x).\frac{dx}{a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).dx$ qui est une intégrale convergente.
Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_v(u).du$ est une intégrale convergente.
En remarquant que ψ_v est positive, on en déduit que ψ_v est intégrable sur \mathbb{R} .

I-E.2)

Avec le même changement de variable,
 $\lim_{v \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \psi_v(u).du = \lim_{v \rightarrow +\infty} - \int_{av}^{-\infty} \varphi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).dx$ et comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).dx = \pi$,
 $\lim_{v \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \psi_v(u).du = \pi$.

I-F)

→ Si $u \neq v$,
 $K = \int_{-2a}^{2a} \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{it(u-v)}.dt = \int_{-2a}^0 \left(1 + \frac{t}{2a}\right).e^{it(u-v)}.dt + \int_0^{2a} \left(1 - \frac{t}{2a}\right).e^{it(u-v)}.dt = K_1 + K_2$.

On calcule K_1 et K_2 au moyen de deux intégrations par parties.

- $K_1 = \left[\left(1 + \frac{t}{2a}\right) \cdot \frac{i}{v-u} \cdot e^{it(u-v)} \right]_{-2a}^0 - \frac{1}{2a} \times \frac{i}{v-u} \int_{-2a}^0 e^{it(u-v)}.dt$

$$K_1 = \frac{i}{v-u} + \frac{1}{2a} \times \frac{1}{(v-u)^2} [1 - e^{-2ia(u-v)}]$$

- $K_2 = \left[\left(1 - \frac{t}{2a}\right) \cdot \frac{i}{v-u} \cdot e^{it(u-v)} \right]_0^{2a} + \frac{1}{2a} \times \frac{i}{v-u} \int_0^{2a} e^{it(u-v)}.dt$

$$K_2 = -\frac{i}{v-u} - \frac{1}{2a} \times \frac{1}{(v-u)^2} [e^{2ia(u-v)} - 1]$$

D'où $K = -\frac{1}{2a(v-u)^2} [e^{2ia(u-v)} - 2 + e^{-2ia(u-v)}] = -\frac{1}{2a(v-u)^2} [e^{ia(u-v)} - e^{-ia(u-v)}]^2$

soit $K = \frac{4.\sin^2[a(v-u)]}{2a.(v-u)^2} = 2\psi_v(u)$.

→ Si $u = v$, $K = \int_{-2a}^{2a} \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).dt = \int_{-2a}^0 \left(1 + \frac{t}{2a}\right).dt + \int_0^{2a} \left(1 - \frac{t}{2a}\right).dt$

$$K = \left[t + \frac{t^2}{4a} \right]_{-2a}^0 + \left[t - \frac{t^2}{4a} \right]_0^{2a} = 2a = 2\psi_v(v)$$

Donc $\forall u \in \mathbb{R}, \int_{-2a}^{2a} \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{it(u-v)}.dt = 2\psi_v(u)$.

I-G.1) Si $\sigma \geq 1$ alors pour tout réel u positif, $\psi_v(u).e^{(1-\sigma)u} \geq 0$.

De plus $0 \leq \psi_v(u).e^{(1-\sigma)u} \leq \psi_v(u)$.

Comme ψ_v est intégrable sur \mathbb{R}_+ , $\forall \sigma \geq 1$, la fonction $u \mapsto \psi_v(u).e^{(1-\sigma)u}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

I-G.2) La fonction $\Phi: \sigma \geq 1 \mapsto \int_0^{+\infty} \psi_v(u).e^{(1-\sigma)u}.du$ est définie par une intégrale impropre

à paramètre et d'après la question précédente, $\mathcal{D}_\Phi = [1, +\infty[$.

- La fonction $(\sigma, u) \mapsto \psi_v(u).e^{(1-\sigma)u}$ est continue sur $[1, +\infty[\times \mathbb{R}_+$,
- $\forall (\sigma, u) \in [1, +\infty[\times \mathbb{R}_+$, $|\psi_v(u).e^{(1-\sigma)u}| \leq \psi_v(u)$ et ψ_v est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

On en déduit que la fonction Φ est continue sur $[1, +\infty[$.

Par suite, $\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \Phi(\sigma) = \Phi(1)$ soit $\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \int_0^{+\infty} \psi_v(u).e^{(1-\sigma)u}.du = \int_0^{+\infty} \psi_v(u).du$.

II-A) $\forall n \geq 2$, $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} B(k).[k^{-\sigma} - (k+1)^{-\sigma}]$.

Cette définition pose un problème pour $n = 1$ car elle suppose $n - 1 \geq 1$ donc $n \geq 2$.

II-A.1) $\forall n \geq 2$, $u_{n+1} - u_n = B(n).[n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma}]$.

- $B(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \geq 0$ car les réels β_k sont positifs.
- $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ et, comme $\sigma > 1$, $n^{-\sigma} > (n+1)^{-\sigma}$.

Par suite, $\forall n \geq 2$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

II-A.2) $\forall n \geq 2$, $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} B(k).k^{-\sigma} - \sum_{k=1}^{n-1} B(k).(k+1)^{-\sigma}$.

$$\forall n \geq 2, u_n = B(1) + \sum_{k=2}^{n-1} B(k).k^{-\sigma} - \sum_{k=1}^{n-2} B(k).(k+1)^{-\sigma} - B(n-1).n^{-\sigma}$$

$$\forall n \geq 2, u_n = \beta_1 + \sum_{k=2}^{n-1} B(k).k^{-\sigma} - \sum_{k=2}^{n-1} B(k-1).(k)^{-\sigma} - B(n-1).n^{-\sigma}$$

$$\forall n \geq 2, u_n = \beta_1 \times 1^{-\sigma} + \sum_{k=2}^{n-1} \beta_k.k^{-\sigma} - B(n-1).n^{-\sigma}$$

Donc $\forall n \geq 2$, $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k.k^{-\sigma} - B(n-1).n^{-\sigma}$.

→ Comme $\sigma > 1$, la série $\sum \beta_n.n^{-\sigma}$ converge.

Si on note S sa somme, comme c'est une série à termes positifs, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k.k^{-\sigma} \leq S$.

→ $\forall n \geq 2$, $-B(n-1).n^{-\sigma} \leq 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est majorée par S .

Comme elle est croissante, (u_n) est convergente. On note u sa limite.

II-A.3) $\forall n \geq 1, B(n).(n+1)^{-\sigma} = \sum_{k=1}^n \beta_k.k^{-\sigma} - u_{n+1}$

donc $\forall n \geq 1, B(n).n^{-\sigma} = \left[\sum_{k=1}^n \beta_k.k^{-\sigma} - u_{n+1} \right] \times \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-\sigma}$

D'après les résultats précédents, la suite $(B(n).n^{-\sigma})$ converge vers $S - u$.

II-A.4) La fonction B est continue et croissante.

Pour montrer qu'elle admet une limite finie en $+\infty$, il suffit de montrer qu'elle est majorée.

Pour $\varepsilon = 1, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, S - u - 1 \leq B(n).n^{-\sigma} \leq S - u + 1$.

$\forall x \in [N, +\infty[, E(x) \leq x < E(x+1)$ donc $B(x) < B[E(x)+1] \leq \frac{S-u+1}{[E(x)+1]^{-\sigma}} \leq S-u+1$.

Par suite, B admet une limite finie en $+\infty$.

II-B.1) La fonction $u \mapsto e^u$ est une bijection de classe C^1 strictement croissante de \mathbb{R}_+ sur $[1, +\infty[$.

Le changement de variable $u = e^t$ donne $G(s) = \int_0^{+\infty} [e^{-u}.B(e^u) - 1].(e^u)^{-s}.e^u.du$

soit $G(s) = \int_0^{+\infty} [e^{-u}.B(e^u) - 1].e^{(1-s)u}.du$.

II-B.2) $H(a, v) = \int_{-2a}^{2a} G(\sigma + it). \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right). e^{itv}. dt = \int_{-2a}^{2a} \left(\int_0^{+\infty} [e^{-u}.B(e^u) - 1].e^{(1-\sigma-it)u}.du \right). \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right). e^{itv}. dt$

donc $|H(a, v)| \leq \int_{-2a}^{2a} \left| \int_0^{+\infty} [e^{-u}.B(e^u) - 1].e^{(1-\sigma-it)u}.du \right| \cdot \left| 1 - \frac{|t|}{2a} \right| . dt$ car $|e^{itv}| = 1$

d'où $|H(a, v)| \leq \int_{-2a}^{2a} \left(\int_0^{+\infty} |e^{-u}.B(e^u) - 1|.e^{(1-\sigma)u}.du \right) . dt$ car $\begin{cases} |e^{-itu}| = 1 \\ \forall t \in [-2a, 2a], 1 - \frac{|t|}{2a} \in [0, 1] \end{cases}$

La fonction F_s est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale $G(s)$ est absolument convergente.

Soit K le réel $\int_0^{+\infty} |e^{-u}.B(e^u) - 1|.e^{(1-\sigma)u}.du$, $|H(a, v)| \leq \int_{-2a}^{2a} K.du = 4aK$.

II-B.3) $H(a, v) = \int_0^{+\infty} [e^{-u}.B(e^u) - 1].e^{(1-\sigma)u} \left[\int_{-2a}^{2a} e^{-itu} \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right). e^{itv}. dt \right]. du$

$H(a, v) = \int_0^{+\infty} [e^{-u}.B(e^u) - 1].e^{(1-\sigma)u} \left[\int_{-2a}^{2a} \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right). e^{it(v-u)}. dt \right]. du$

$H(a, v) = 2 \int_0^{+\infty} [e^{-u}.B(e^u) - 1].e^{(1-\sigma)u}. \psi_v(u). du$ car $\psi_u(v) = \psi_v(u)$.

II-C.1) • La fonction $u \mapsto e^{-\sigma u}.B(e^u). \psi_v(u)$ est continue et positive sur \mathbb{R}_+ .

• $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \lim_{u \rightarrow +\infty} e^{-\sigma u}.B(e^u) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x=e^u)}} B(x).x^{-\sigma} = \lambda$.

• ψ_v est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

On en déduit que $e^{-\sigma u}.B(e^u). \psi_v(u) \approx \lambda \psi_v(u)$ et donc que $\int_0^{+\infty} e^{-\sigma u}.B(e^u). \psi_v(u). du$ converge.

Par suite, $u \mapsto e^{-\sigma u}.B(e^u). \psi_v(u)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

II-C.2) La fonction $\sigma \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\sigma u} \cdot B(e^u) \cdot \psi_v(u) \cdot du$ est définie par une intégrale impropre à paramètre.

- La fonction $(\sigma, u) \mapsto e^{-\sigma u} \cdot B(e^u) \cdot \psi_v(u)$ est continue sur $]\sigma_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+$.
- $\forall (\sigma, u) \in]\sigma_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+, |e^{-\sigma u} \cdot B(e^u) \cdot \psi_v(u)| = e^{-\sigma u} \cdot B(e^u) \cdot \psi_v(u) \leq e^{-\sigma_0 u} \cdot B(e^u) \cdot \psi_v(u)$
et on vient de voir que cette dernière fonction qui ne dépend pas de σ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Par suite, $\forall \sigma_0 > 1$, la fonction $\sigma \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\sigma u} \cdot B(e^u) \cdot \psi_v(u) \cdot du$ est continue sur $]\sigma_0, +\infty[$.

Conformément à l'énoncé, on admet que $\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma u} \cdot B(e^u) \cdot \psi_v(u) \cdot du = \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot B(e^u) \cdot \psi_v(u) \cdot du$.

II-D) D'après le II-B.3, $\int_{-2a}^{2a} G(\sigma + it) \cdot \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right) \cdot e^{itv} \cdot dt = 2 \int_0^{+\infty} [e^{-u} \cdot B(e^u) - 1] \cdot e^{(1-\sigma)u} \cdot \psi_v(u) \cdot du$

donc $\int_{-2a}^{2a} G(\sigma + it) \cdot \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right) \cdot e^{itv} \cdot dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\sigma u} \cdot B(e^u) \cdot \psi_v(u) \cdot du - 2 \int_0^{+\infty} e^{(1-\sigma)u} \cdot \psi_v(u) \cdot du$.

- On vient d'admettre que: $\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma u} \cdot B(e^u) \cdot \psi_v(u) \cdot du = \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot B(e^u) \cdot \psi_v(u) \cdot du$,

- D'après le I-G.2, $\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \int_0^{+\infty} e^{(1-\sigma)u} \cdot \psi_v(u) \cdot du = \int_0^{+\infty} \psi_v(u) \cdot du$.

On en déduit que: $\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \int_{-2a}^{2a} G(\sigma + it) \cdot \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right) \cdot e^{itv} \cdot dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot B(e^u) \cdot \psi_v(u) \cdot du - 2 \int_0^{+\infty} \psi_v(u) \cdot du$

soit $\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \int_{-2a}^{2a} G(\sigma + it) \cdot \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right) \cdot e^{itv} \cdot dt = 2 \int_0^{+\infty} [e^{-u} \cdot B(e^u) - 1] \cdot \psi_v(u) \cdot du$

et, encore d'après II-B.3, $\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \int_{-2a}^{2a} G(\sigma + it) \cdot \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right) \cdot e^{itv} \cdot dt = \int_{-2a}^{2a} G(1 + it) \cdot \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right) \cdot e^{itv} \cdot dt$.

II-E) $\int_{-2a}^{2a} G(1 + it) \cdot \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right) \cdot e^{itv} \cdot dt + 2 \int_0^{+\infty} \psi_v(u) \cdot du = 2 \int_0^{+\infty} [e^{-u} \cdot B(e^u) - 1] \cdot \psi_v(u) \cdot du + 2 \int_0^{+\infty} \psi_v(u) \cdot du$.

La linéarité des intégrales impropres donne immédiatement

$$\int_{-2a}^{2a} G(1 + it) \cdot \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right) \cdot e^{itv} \cdot dt + 2 \int_0^{+\infty} \psi_v(u) \cdot du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot B(e^u) \cdot \psi_v(u) \cdot du$$

II-F.1) On suppose que si h est continue sur $[\alpha, \beta]$ alors $\lim_{v \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} h(t) \cdot e^{itv} \cdot dt = 0$.

La fonction $t \mapsto G(1 + it) \cdot \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right)$ étant continue sur $[-2a, 2a]$,

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \int_{-2a}^{2a} G(1 + it) \cdot \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right) \cdot e^{itv} \cdot dt = 0$$

II-F.2) On a vu dans II-E que $\int_{-2a}^{2a} G(1 + it) \cdot \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right) \cdot e^{itv} \cdot dt + 2 \int_0^{+\infty} \psi_v(u) \cdot du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot B(e^u) \cdot \psi_v(u) \cdot du$.

Par passage à la limite, $\lim_{v \rightarrow +\infty} \int_{-2a}^{2a} G(1 + it) \cdot \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right) \cdot e^{itv} \cdot dt = 0$ et $\lim_{v \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \psi_v(u) \cdot du$

donnent $\lim_{v \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot B(e^u) \cdot \psi_v(u) \cdot du = \pi$.