

## Partie I

Remarque : mauvais parenthésage pour  $A_2$  (sortir le  $\forall j$ ).

**D1)** On a  $M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \equiv (\overline{M_1} \implies M_2 \wedge M_3)$ , c'est-à-dire : « si le candidat  $C_i$  n'est pas affecté à l'école  $E_j$  alors il est affecté à une école qu'il préfère à  $E_j$  ou  $E_j$  a fait le plein avec  $N_j$  candidats qu'elle préfère à  $C_i$  ».

**D2)** Non. Contre-exemple : il y a deux écoles  $E_1$  et  $E_2$  offrant chacune une place et deux candidats,  $C_1$  candidat à  $E_1$  et  $E_2$  dans cet ordre,  $C_2$  candidat seulement à  $E_1$ . Si  $E_1$  préfère  $C_1$  à  $C_2$  alors l'unique affectation méritoire consiste à placer  $C_1$  dans  $E_1$  et  $C_2$  n'est pas affecté,  $E_2$  n'est pas remplie.

Par contre si l'on ajoute l'hypothèse que tout candidat est candidat à toutes les écoles alors toute affectation méritoire est totale car si  $\mathcal{A}$  est une affectation méritoire qui ne place pas un candidat  $C_i$  alors toutes les écoles  $E_j$  sont remplies (de candidats préférés à  $C_i$ ).

**E1)**  $(C_i, E_j)$  est inutile s'il y a au moins  $N_j$  autres candidats plaçant  $E_j$  en tête de leurs préférences et qui sont préférés à  $C_i$  par  $E_j$ . Soit  $\mathcal{G}$  un graphe comportant un nœud inutile  $(C_k, E_\ell)$ ,  $\mathcal{G}'$  le graphe obtenu en supprimant ce nœud et en reconstituant les ordres de préférence entre les nœuds restants par transitivité. Soit  $\mathcal{A}$  une affectation de  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{A}'$  une affectation de  $\mathcal{G}'$ , méritoires. Il s'agit de montrer que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}'$ , que  $\mathcal{A}$  est méritoire pour  $\mathcal{G}'$ , et que  $\mathcal{A}'$  est méritoire pour  $\mathcal{G}$ . La propriété de conservation des affectations méritoires après suppression des nœuds inutiles dans un graphe s'ensuivra par récurrence sur le nombre de nœuds inutiles, car il est clair que tout nœud autre que  $(C_k, E_\ell)$  qui est inutile dans  $\mathcal{G}$  est aussi inutile dans  $\mathcal{G}'$ .

–  $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}'$  : sinon  $(C_k, E_\ell) \in \mathcal{A}$ . Il y a au moins  $N_\ell$  candidats ayant placé  $E_\ell$  en tête de leurs préférences et préférés à  $C_k$  par  $E_\ell$ , donc l'un d'entre eux au moins n'est pas affecté à  $E_\ell$ . Si  $C_i$  est un tel candidat alors le nœud  $(C_i, E_\ell)$  ne vérifie ni  $M_1$ , ni  $M_2$ , ni  $M_3$ , ce qui contredit le caractère méritoire de  $\mathcal{A}$  vis-à-vis de  $\mathcal{G}$ .

–  $\mathcal{A}$  est méritoire pour  $\mathcal{G}'$  : car les propriétés  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  ne font intervenir, outre le nœud  $(C_i, E_j)$  considéré, que des nœuds appartenant à  $\mathcal{A}$  et l'on a  $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}'$ .

–  $\mathcal{A}'$  est méritoire pour  $\mathcal{G}$  : il faut juste vérifier que le nœud  $(C_k, E_\ell)$  supprimé vérifie l'une des propriétés  $M_1$ ,  $M_2$  ou  $M_3$  vis-à-vis de  $\mathcal{A}'$ . Soient  $C_{i_1}, \dots, C_{i_n}$  les candidats autres que  $C_k$  ayant placé  $E_\ell$  en tête de leurs préférences et préférés à  $C_k$  par  $E_\ell$ . Si  $\mathcal{A}'$  affecte tous ces candidats à  $E_\ell$  alors  $n = N_\ell$  et  $E_\ell$  est complète avec des candidats qu'elle préfère à  $C_k$ , donc  $M_3$  est vérifié. Sinon l'un d'entre eux,  $C_{i_p}$ , n'est pas affecté à  $E_\ell$  qui est son école préférée, donc  $E_\ell$  est complète avec des candidats qu'elle préfère à  $C_{i_p}$  et à fortiori à  $C_k$  ;  $M_3$  est encore vérifiée dans ce cas.

**E2)** *Tant qu'il reste des nœuds inutiles :*  
     *en choisir un  $(C_i, E_j)$  et le supprimer ;*  
     *s'il ne reste plus de nœud  $(C_i, E_k)$ , supprimer la colonne  $C_i$ .*  
*Fin tant que.*  
*Affecter chaque candidat restant à l'école qu'il préfère.*

Validité : il faut juste prouver que si un graphe ne comporte pas de nœud inutile, alors l'affectation  $\mathcal{A}$  de chaque candidat à l'école qu'il préfère respecte les capacités des écoles et est méritoire. Le respect des capacités des écoles résulte directement du fait qu'il n'y a pas de nœud inutile. L'affectation est méritoire car tout nœud vérifie l'une des propriétés  $M_1$  ou  $M_2$ .

**E3)** En supprimant les nœuds inutiles  $(C_2, E_3)$ ,  $(C_3, E_3)$  on obtient l'affectation  $\{(C_1, E_3), (C_2, E_2), (C_3, E_2), (C_4, E_1)\}$ .

**F1)** On convient qu'un nœud  $(C_i, E_j)$  est inutile pour le candidat  $C_i$  s'il est sûr de pouvoir intégrer une école qu'il préfère à  $E_j$ , c'est-à-dire s'il existe  $E_k$ ,  $k \neq j$  telle que  $(C_i, E_k)$  appartient au graphe et  $C_i$  est classé au plus  $N_k$ -ème dans la liste de préférence de  $E_k$ .

**F2)** Même principe de démonstration que pour la question **E1**. Soit  $\mathcal{G}$  un graphe comportant un nœud  $(C_k, E_\ell)$  inutile pour les candidats,  $\mathcal{G}'$  le graphe obtenu en supprimant ce nœud et en reconstituant les ordres de préférence entre les nœuds restants par transitivité. Soit  $\mathcal{A}$  une affectation de  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{A}'$  une affectation de  $\mathcal{G}'$ , méritoires. La suppression de  $(C_k, E_\ell)$  améliore les classements des autres candidats pour l'école  $E_\ell$  donc tout nœud autre que  $(C_k, E_\ell)$  qui est inutile pour les candidats dans  $\mathcal{G}$  est aussi inutile pour les candidats dans  $\mathcal{G}'$ .

–  $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}'$  : sinon  $(C_k, E_\ell) \in \mathcal{A}$  ce qui implique d'après la propriété  $M_3$  que toutes les écoles que  $C_k$  préférerait à  $E_\ell$  ont fait le plein avec des candidats mieux classés que  $C_k$ , en contradiction avec le caractère inutile du nœud  $(C_k, E_\ell)$ .

–  $\mathcal{A}$  est méritoire pour  $\mathcal{G}'$  : même raison qu'en **E1**.

–  $\mathcal{A}'$  est méritoire pour  $\mathcal{G}$  : car  $C_k$  est nécessairement affecté par  $\mathcal{A}'$  à une école qu'il préfère à  $E_\ell$ .

**F3)** Tant qu'il reste des nœuds inutiles pour les candidats :

en choisir un  $(C_i, E_j)$  et le supprimer ;

s'il ne reste plus de nœud  $(C_k, E_j)$ , supprimer la ligne  $E_j$ .

Fin tant que.

Affecter à chaque école  $E_j$  les  $N_j$  premiers candidats restant pour l'ordre de préférence de  $E_j$  ou tous les candidats à cette école s'il en reste moins de  $N_j$ .

Validité : il faut juste prouver que si un graphe ne comporte pas de nœud inutile pour les candidats, alors l'affectation  $\mathcal{A}$  obtenue ne conduit pas à affecter un candidat à plusieurs écoles et est méritoire. L'affectation d'un candidat à au plus une école résulte directement du fait qu'il n'y a pas de nœud inutile pour les candidats. L'affectation est méritoire car tout nœud vérifie l'une des propriétés  $M_1$  ou  $M_3$ .

**F4)** En supprimant les nœuds inutiles  $(C_1, E_2), (C_3, E_3)$  on obtient l'affectation  $\{(C_1, E_3), (C_2, E_1), (C_3, E_2), (C_4, E_2)\}$ .

**G1)** Si  $\mathcal{G}$  est un graphe sans nœud inutile pour une école et  $\mathcal{G}'$  est déduit de  $\mathcal{G}$  par suppression d'un nœud inutile pour un candidat, alors  $\mathcal{G}'$  ne contient pas non plus de nœud inutile pour une école car aucun candidat n'a reculé dans un classement à la suite de cette suppression. De même, si  $\mathcal{G}$  ne contient pas de nœud inutile pour un candidat et  $\mathcal{G}'$  est déduit de  $\mathcal{G}$  par suppression d'un nœud inutile pour une école alors  $\mathcal{G}'$  ne contient pas de nœud inutile pour un candidat. On obtient donc un graphe sans nœud inutile associé à un graphe par l'un des trois algorithmes suivants :

- Supprimer tous les nœuds inutiles pour les écoles, puis tous les nœuds inutiles pour les candidats.
- Supprimer tous les nœuds inutiles pour les candidats, puis tous les nœuds inutiles pour les écoles.
- Supprimer un à un tous les nœuds inutiles.

**G2)** On obtient le graphe réduit  $\{(C_1, E_3), (C_2, E_1), (C_2, E_2), (C_3, E_2), (C_4, E_1), (C_4, E_2)\}$  qui a comme affectations méritoires celles trouvées en **E3** et en **F4**.

## Partie II

**A1-A2)** On a les tables de vérités ci-contre pour  $s_0, s_1$  qui donnent immédiatement :

$$s_0 \equiv (x_0 \text{ OR } x_1 \text{ OR } x_2) \text{ AND } (x_3 \text{ OR NOT}(x_2))$$

$$s_1 \equiv x_2 \text{ OR } x_3.$$

| $x_3 x_2 x_1 x_0$ | $X \lfloor \sqrt{X} \rfloor$ | $s_1 s_0$ |
|-------------------|------------------------------|-----------|
| 0 0 0 0           | 0 0                          | 0 0       |
| 0 0 0 1           | 1 1                          | 0 1       |
| 0 0 1 0           | 2 1                          | 0 1       |
| 0 0 1 1           | 3 1                          | 0 1       |
| 0 1 0 0           | 4 2                          | 1 0       |
| 0 1 0 1           | 5 2                          | 1 0       |
| 0 1 1 0           | 6 2                          | 1 0       |
| 0 1 1 1           | 7 2                          | 1 0       |

| $x_3 x_2 x_1 x_0$ | $X \lfloor \sqrt{X} \rfloor$ | $s_1 s_0$ |
|-------------------|------------------------------|-----------|
| 1 0 0 0           | 8 2                          | 1 0       |
| 1 0 0 1           | 9 3                          | 1 1       |
| 1 0 1 0           | 10 3                         | 1 1       |
| 1 0 1 1           | 11 3                         | 1 1       |
| 1 1 0 0           | 12 3                         | 1 1       |
| 1 1 0 1           | 13 3                         | 1 1       |
| 1 1 1 0           | 14 3                         | 1 1       |
| 1 1 1 1           | 15 3                         | 1 1       |

**B1-B2)** Immédiat.

**B3)**  $f$  est indépendante de  $x_i$  si et seulement si  $f_{x_i} = f_{\bar{x}_i}$ , soit si et seulement si  $f_{x_i} \oplus f_{\bar{x}_i} = 0$ . Par contraposée, si  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 1$  alors  $f$  dépend de  $x_i$  (condition seulement suffisante).

**B4)**  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \bar{f}_{x_i} \oplus \bar{f}_{\bar{x}_i} = \overline{f_{x_i}} \oplus \overline{f_{\bar{x}_i}} = f_{x_i} \oplus f_{\bar{x}_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ .

**B5)** Notons  $A = \frac{\partial(f \wedge g)}{\partial x_i}$  et  $B = (f \wedge \frac{\partial g}{\partial x_i}) \oplus (g \wedge \frac{\partial f}{\partial x_i}) \oplus (\frac{\partial f}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial g}{\partial x_i})$ . Pour  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  donnés on a les tables de vérités suivantes qui prouvent l'égalité demandée :

| $f_{x_i} f_{\bar{x}_i} g_{x_i} g_{\bar{x}_i}$ | $f$         | $g$         | $(f \wedge g)_{x_i}$ | $(f \wedge g)_{\bar{x}_i}$ | $A$ | $B$ |
|-----------------------------------------------|-------------|-------------|----------------------|----------------------------|-----|-----|
| 0 0 0 0                                       | 0           | 0           | 0                    | 0                          | 0   | 0   |
| 0 0 0 1                                       | 0           | $\bar{x}_i$ | 0                    | 0                          | 0   | 0   |
| 0 0 1 0                                       | 0           | $x_i$       | 0                    | 0                          | 0   | 0   |
| 0 0 1 1                                       | 0           | 1           | 0                    | 0                          | 0   | 0   |
| 0 1 0 0                                       | $\bar{x}_i$ | 0           | 0                    | 0                          | 0   | 0   |
| 0 1 0 1                                       | $\bar{x}_i$ | $\bar{x}_i$ | 0                    | 1                          | 1   | 1   |
| 0 1 1 0                                       | $\bar{x}_i$ | $x_i$       | 0                    | 0                          | 0   | 0   |
| 0 1 1 1                                       | $\bar{x}_i$ | 1           | 0                    | 1                          | 1   | 1   |

| $f_{x_i} f_{\bar{x}_i} g_{x_i} g_{\bar{x}_i}$ | $f$   | $g$         | $(f \wedge g)_{x_i}$ | $(f \wedge g)_{\bar{x}_i}$ | $A$ | $B$ |
|-----------------------------------------------|-------|-------------|----------------------|----------------------------|-----|-----|
| 1 0 0 0                                       | $x_i$ | 0           | 0                    | 0                          | 0   | 0   |
| 1 0 0 1                                       | $x_i$ | $\bar{x}_i$ | 0                    | 0                          | 0   | 0   |
| 1 0 1 0                                       | $x_i$ | $x_i$       | 1                    | 0                          | 1   | 1   |
| 1 0 1 1                                       | $x_i$ | 1           | 1                    | 0                          | 1   | 1   |
| 1 1 0 0                                       | 1     | 0           | 0                    | 0                          | 0   | 0   |
| 1 1 0 1                                       | 1     | $\bar{x}_i$ | 0                    | 1                          | 1   | 1   |
| 1 1 1 0                                       | 1     | $x_i$       | 1                    | 0                          | 1   | 1   |
| 1 1 1 1                                       | 1     | 1           | 1                    | 1                          | 0   | 0   |

**B6)** Remplacer  $f$  et  $g$  par  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  dans la formule précédente et appliquer l'égalité vue en **B4**.