ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

M

Concours d'Admission 1975

DEUX pages dactylographiées

MATHEMATIQUES II

1°) *Soit E un espace vectoriel euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe $b = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On définit un vecteur $\vec{I}$ par :*

$$\vec{I} = (\vec{i}\cos t + \vec{j}\sin t)\cos 2t + \vec{k}\sin 2t.$$

Déterminer le vecteur $\vec{J}$ qui est : normé, orthogonal à $\vec{I}$, situé dans le plan défini par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et égal à $\vec{i}$ pour $t=\pi/2$.

Déterminer le vecteur $\vec{K}$ défini par : $\vec{K} = \vec{I} \wedge \vec{J}$.

2°) *Un espace affine A est associé à E. ; A est rapporté au repère $(O;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un solide S est mobile par rapport à A; S est fixe par rapport au repère $(O';\ \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$; la base $B=(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ a été définie dans la première question ; O' est défini par :*

$$\overrightarrow{OO'} = a\cos 3t\ \vec{i} - a\sin 3t\ \vec{j} + \frac{9a}{4}\sin 4t\ \vec{k}.$$

t désigne le temps, a est une constante positive non nulle.

Déterminer le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}(t)$ dans les bases b et B.

Déterminer la vitesse de translation.

3°) *Soit D(t) l'axe central du torseur T des vitesses des points de S à l'instant t.*

Déterminer D(t) relativement au repère de A, en exprimant x et y en fonction de z et de t ; montrer que, pour tout point m(x,y,z) de D(t), on peut écrire :

$$\overrightarrow{Om} = z\vec{\Omega}(t) + \vec{u}(t).$$

Soit f(t) une fonction dérivable de t et soit (c) la courbe engendrée par le point p(t) défini par : $\overrightarrow{Op} = f(t)\vec{\Omega}(t) + \vec{u}(t)$.

Montrer qu'il existe une fonction f(t) telle que la droite D(t) soit la tangente à (c) en p(t) ; calculer les coordonnées de p(t).

Soit (γ) la projection orthogonale de (c) sur le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$; quels sont les éléments de symétrie de (γ) ? Tracer (γ) avec soin.

Quels sont les points singuliers de (c) ? Calculer la longueur de (c).

4°) Déterminer D(t) relativement au repère de S en exprimant X et Z en fonction de Y et de t ; montrer que, pour tout point M(X,Y,Z) de D(t), on peut écrire :

$$\overrightarrow{O'M} = \frac{1}{2} Y \vec{\Omega}(t) + \vec{U}(t).$$

Montrer qu'il existe une fonction F(t), dérivable, telle que la droite D(t) soit la tangente en P(t) à la courbe (C) ; (C) étant la courbe engendrée par P(t) qui est défini par : $\overrightarrow{O'P}(t) = \frac{1}{2} F(t) \vec{\Omega}(t) + \vec{U}(t)$.

Calculer les coordonnées de P(t) ; tracer la projection orthogonale (Γ) de (C) sur le plan $(O'; \vec{I}, \vec{K})$*; préciser les éléments de symétrie de (Γ).*

Quels sont les points singuliers de (C) ? Calculer la longueur de (C).

5°) Montrer que les points p(t) et P(t) définis dans les questions 3 et 4 sont confondus à l'instant t.

Que peut-on dire du torseur T aux instants où les points p et P sont chacun en un point singulier de (c) et de (C) respectivement ?

6°) Montrer qu'il existe dans S quatre points tels que la trajectoire de chacun d'eux soit située dans un plan contenant $(O; \vec{k})$ *; on pourra utiliser le fait que les fonctions cost, sint, cos3t et sin3t sont linéairement indépendantes.*

FIN

oooooo
oooo
oo
o