

Exercice I

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_k : t \mapsto t^{2k} \ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$.

- Pour $k \geq 1$, on a par croissance comparée : $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_k(t) = 0$, donc f_k est prolongeable par continuité en 0 et par suite elle est intégrable sur $]0, 1]$, ainsi I_k existe.
- Pour $k = 0$, on a encore par croissance comparée : $f_k(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ au voisinage de 0^+ , avec $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ intégrable sur $]0, 1]$ car de type Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, donc f_k est aussi intégrable sur $]0, 1]$, ainsi I_0 existe.
- Soit $0 < x \leq 1$, à l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$\int_x^1 t^{2k} \ln(t) dt = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \ln(t) \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^{2k}}{2k+1} dt$$

Or le crochet est de limite nulle en 0^+ , ainsi

$$I_k = - \int_0^1 \frac{t^{2k}}{2k+1} dt = - \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

2. On a la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2 - 1}$ est continue sur $]0, 1[$, de plus :

- Puisque $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t)}{t-1} = 1$, donc $\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t)}{t-1} \frac{1}{t+1} = \frac{1}{2}$, ainsi f est prolongeable par continuité en 1 et par suite elle est intégrable au voisinage de 1.
- Au voisinage de 0^+ , on a $f(t) \sim -\ln(t)$ qui est intégrable sur $]0, 1[$ selon la question Q.1 en prenant $k = 0$.
- On conclut alors que f est intégrable sur $]0, 1[$.

On sait que $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$ est DSE à l'origine et on a pour tout $|t| < 1$, $\frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}$, on obtient alors

$$\int_0^1 f(t) dt = - \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} \ln(t) dt = - \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) dt$$

- On a $\sum_{k \geq 0} f_k$ est une série de fonctions continues (par morceaux) sur $]0, 1[$ et convergente simplement vers $-f$ qui est continue (par morceaux) sur $]0, 1[$.
- De plus $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_k(t)| dt = -I_k = \frac{1}{(2k+1)^2} \sim \frac{1}{4k^2}$, donc la série de terme général $\int_0^1 |f_k(t)| dt$ est convergente par le critère d'équivalence.

On peut alors appliquer le théorème de la sommation L^1 pour avoir

$$\int_0^1 f(t) dt = - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k(t) dt = - \sum_{k=0}^{+\infty} I_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

- La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ étant absolument convergente, donc la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ est sommable, on peut alors calculer sa somme en regroupant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

On en déduit

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice II

3. La fonction \ln est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifie $\forall x > 0, \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, donc elle est concave sur cet intervalle. Par l'inégalité de Jensen généralisée, on a pour $n \geq 1, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ de somme 1 et $x_1, \dots, x_n > 0$:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(x_i) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)$$

En particulier pour $n = 3, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ et $a, b, c > 0$, on aura

$$\ln\left(\sqrt[3]{abc}\right) = \frac{1}{3} \ln(a) + \frac{1}{3} \ln(b) + \frac{1}{3} \ln(c) \leq \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

En composant par la fonction exponentielle qui est croissante sur \mathbb{R} , on obtient alors l'inégalité arithmético-géométrique demandée.

4. f étant une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynomiales), donc différentiable (même de classe C^∞) sur son domaine de définition, en particulier différentiable sur $]0, +\infty[^2$. De plus, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 - \frac{1}{yx^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 - \frac{1}{xy^2}$$

- Si $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ est critique, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, donc $xy^2 = yx^2 = 1$, par suite $xy(x-y) = 0$, or x et y non nuls, donc $x = y$, puis $x^3 = 1$, donc forcément $(x, y) = (1, 1)$. la réciproque étant évidente. On conclut que $(1, 1)$ est le seul point critique de f dans le quart de plan $]0, +\infty[^2$.
- Puisque f est différentiable sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$, alors si f présente un extrémum en un point (x_0, y_0) de cet ouvert, alors forcément (x_0, y_0) est un point critique de f , et par suite $(x_0, y_0) = (1, 1)$.
- En appliquant la question Q1., pour $a = x, b = y$ et $z = \frac{1}{xy}$, on obtient alors pour tout $x, y > 0$:

$$\frac{1}{3} \left(x + y + \frac{1}{xy}\right) = \frac{1}{3} f(x, y) \geq \sqrt[3]{\frac{xy}{xy}} = 1, \text{ c\`a d } f(x, y) \geq 3 = f(1, 1)$$

Ainsi f admet au point critique $(1, 1)$ un minimum global, ce minimum vaut $f(1, 1) = 3$.

Problème : Un peu d'arithmétique avec la fonction zêta

Algorithmique : calcul de zêta aux entiers pairs

5. On pourra écrire une fonction factorielle(n) récursive ou itérative : (ici itérative)

```
def factorielle(n) :
    if n == 0 :
        return 1
    a = 1
    for k in range(1, n + 1) :
        a* = k
    return a
```

6. On peut calculer factorielle(k) à l'aide de k multiplications, pour calculer binomial $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, on a besoin de $(n+p+(n-p))+1 = 2n+1$ multiplications.

On peut remarquer que

$$\binom{n}{p} = \frac{A(n,p)}{p!}, \text{ où } A(n,p) = n(n-1)\dots(n-p+1) \text{ le coefficient d'arrangement } A_n^p.$$

En effet :

def A(n,p) :

```

    if not (0 <= p <= n) :
        return 0
    a = 1
    for k in range(n - p + 1, n + 1) :
        a *= k
    return a

```

Donc le calcul de $A(n,p)$ se fait à l'aide de p multiplications et celui de $\binom{n}{p} = \frac{A(n,p)}{p!}$ s'obtient à l'aide de $(p+p) = 2p$ multiplications. En particulier binomial $\binom{30}{10}$ s'obtient par 20 multiplications.

Enfin, si on remplace la division // dans \mathbb{Z} par la division usuelle, le type de retour sera un flottant : type float.

7. Soit $n \geq p \geq 1$, on a alors

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n}{p} \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$$

On peut alors écrire :

def binom_rec(n,p) :

```

    if not (0 <= p <= n) :
        return 0
    if n == 0 or p == 0:
        return 1
    return n/p * binom_rec(n - 1, p - 1)

```

8. On a les b_k vérifient une relation récurrente de type :

$$b_0 = 1 \text{ et pour } k \geq 1, b_k = \sum_{i=0}^{k-1} a_i(k) b_i, \text{ où } a_i(k) = -\frac{1}{k+1} \binom{k+1}{i}$$

À l'aide d'une boucle, on va construire les listes $B = [b_0, \dots, b_n]$ et $A_k = [a_0(k), \dots, a_{k-1}(k)]$, on pourra écrire :

def bernoulli(n) :

```

    if n == 0 :
        return 1
    B = [1] # initialisation de la liste des nombres de Bernoulli par B = [b_0] = [1]
    A = [-0.5] # initialisation des listes de coefficients par A_1 = [a_0(1)] = [-0.5]
    for k in range(1, n + 1) :
        b = sum(B[i] * A[i] for i in range(len(B))) # on pourra la recalculer facilement ...
        B.append(b)
        A = [-1/(k + 2) * binomial(k + 2, i) for i in range(k + 1)]
    return B[-1]

```

II - Généralités sur la fonction zéta

9. Puisque $a > 1$, alors pour $1 < \alpha < a$, par croissance comparée, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \times \frac{\ln(n)}{n^a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha-a} \ln(n) = 0$, donc $\frac{\ln(n)}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, or la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est absolument convergente (Riemann $\alpha > 1$), par suite la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ l'est également.

10. On vérifie les hypothèses de dérivation de somme de série de fonctions :

- On a la série $\sum f_n$ converge simplement sur l'intervalle $]1, +\infty[$
- Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et $f'_n(x) = -\frac{\ln(n)}{n^x}$.
- Pour $a > 1$, on a pour tout $x \geq a$, $|f'_n(x)| = \left|\frac{\ln(n)}{n^x}\right| \leq \frac{\ln(n)}{n^a}$. Or selon la question Q9., la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^a}$ est convergente, donc la série des dérivées $\sum f'_n$ converge normalement, donc converge uniformément sur l'intervalle $[a, +\infty[$.
- On conclut alors que la fonction ζ de Riemann est de classe C^1 sur l'intervalle $]1, +\infty[$ et on a

$$\forall x > 1, \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}$$

en particulier sa dérivée est négative, donc elle décroissante sur $]1, +\infty[$.

11. Si la convergence était uniforme sur $]1, +\infty[$, puisque 1 est adhérent à cet ensemble et on a pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_n(x) = \frac{1}{n}$ existe, alors la série des limites $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ serait convergente. Absurde, la convergence n'est donc pas uniforme sur $]1, +\infty[$.

12. On a pour tout $x \geq 2$, $|f_n(x)| = \left|\frac{1}{n^x}\right| \leq \frac{1}{n^2}$. Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente, donc la série $\sum f_n$ converge normalement, donc converge uniformément sur l'intervalle $[2, +\infty[$, on peut faire alors une limite terme à terme au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 1.$$

13. Pour $x > 1$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est continue décroissante sur $[1, +\infty[$, donc

$$\forall k \geq 1, \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^x}$$

les trois termes étant convergent, on va sommer l'inégalité de gauche de $k = 1$ jusqu'à $+\infty$ et celle de droite de $k = 2$ jusqu'à $+\infty$, puis d'ajouter le premier terme $\frac{1}{1^x} = 1$; on obtient alors :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = I(x) \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = 1 + I(x). \text{ CQFD} \quad (1)$$

Or un calcul simple fournit $I(x) = \frac{1}{x-1}$, et puisque $1 + I(x) \sim I(x) = \frac{1}{x-1}$ au voisinage de 1, on conclut alors que $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ au voisinage de 1.

14. On vérifie les hypothèses de sommabilité du théorème de Fubini, puisque $x > 1$, on a :

- La série $\sum_{a \geq 1} \left| \frac{1}{(ab)^x} \right|$ est convergente de somme $\sum_{a=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{(ab)^x} \right| = \frac{\zeta(x)}{b^x}$.
- Et la série $\sum_{b \geq 1} \frac{\zeta(x)}{b^x}$ est aussi convergente de somme $\sum_{b=1}^{+\infty} \frac{\zeta(x)}{b^x} = \zeta^2(x)$

- On conclut alors que la famille $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{a \geq 1, b \geq 1}$ est sommable de somme $s = \zeta^2(x)$.
- Comme indique, pour $n \geq 1$, on note $A_n = \{(a, b) \in A \mid ab = n\}$, alors $(A_n)_{n \geq 1}$ est une partition de A , puisque $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b) \in A}$ est sommable de somme s , alors par le théorème de sommation par paquets, on obtient :

$$s = \zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(a,b) \in A_n} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(a,b) \in A_n} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{card}(A_n)}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}. \text{ CQFD}$$

III - Produit Eulérien

15. On a l'événement $(X \in a\mathbb{N}^*)$ est la réunion disjointe des événements $(X = ak)_{k \geq 1}$, donc par l'axiome de σ -additivité, on a :

$$P(X \in a\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = ak) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)(ak)^s} = \frac{1}{a^s} \times \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{a^s} \times \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{a^s}. \text{ CQFD.}$$

16. Faisant une récurrence sur n :

- Si $n = 1$, le résultat est évident.
- Soit $n \geq 2$, supposons le résultat vrai à l'ordre $(n-1)$, si $(a_1|N, \dots, a_{n-1}|N)$, alors l'hypothèse de récurrence prouve que $a_1 \dots a_{n-1} | N$, et puisque (a_1, \dots, a_n) sont premiers entre eux deux à deux, alors $a_1 \dots a_{n-1}$ et a_n seront deux diviseurs de N premiers entre eux, donc leur produit $a_1 \dots a_{n-1} \times a_n$ divise N . D'où le sens direct. Le sens indirect est trivial car chaque a_i divise le produit $a_1 \dots a_i \dots a_n$.

Pour $n \geq 3$, le sens direct peut tomber en défaut si (a_1, \dots, a_n) sont juste premiers entre eux dans leur ensemble : par exemple si $a_1 = a_2 = 2, a_3 = 3$ et $N = 6$, on a bien $(2, 2, 3)$ premiers entre eux dans leurs ensemble, diviseurs de 6, mais leur produit $2^2 \times 3$ n'est pas diviseurs de 6.

17. Comme indiqué, soit (b_1, \dots, b_r) une sous famille de (a_1, \dots, a_n) , alors $1 \leq r \leq n$ et (b_1, \dots, b_r) sont premiers entre eux deux à deux, donc selon la question Q17.; on obtient l'égalité suivante des événements :

$$(X \in b_1\mathbb{N}^*, \dots, X \in b_r\mathbb{N}^*) = (b_1|X, \dots, b_r|X) = (b_1 \dots b_r | X) = (X \in (b_1 \dots b_r)\mathbb{N}^*)$$

En prenant les probabilités de ces événements, on aura à l'aide de la question Q15 :

$$P(X \in b_1\mathbb{N}^*, \dots, X \in b_r\mathbb{N}^*) = P(X \in (b_1 \dots b_r)\mathbb{N}^*) = \frac{1}{(b_1 \dots b_r)^s} = \frac{1}{b_1^s \dots b_r^s} = P(X \in b_1\mathbb{N}^*) \dots P(X \in b_r\mathbb{N}^*)$$

par conséquent les événements $P(X \in a_1\mathbb{N}^*), \dots, P(X \in a_n\mathbb{N}^*)$ sont mutuellement indépendants.

18. Puisque p_1, \dots, p_n sont premiers et deux deux distincts, ils sont en particulier premiers entre eux deux à deux, donc à l'aide de la question précédente, les événements $(p_1|X), \dots, (p_n|X)$ sont mutuellement indépendants, par suite leurs événements contraires $(p_1 \nmid X), \dots, (p_n \nmid X)$ sont aussi mutuellement indépendants, donc

$$P(B_n) = P((p_1 \nmid X), \dots, (p_n \nmid X)) = P(p_1 \nmid X) \dots P(p_n \nmid X) = \prod_{k=1}^n (1 - P(p_k | X)) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right). \text{ CQFD}$$

19. On a $\omega \in \cap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$ est équivalent au fait que l'entier naturel non nul $X(\omega)$ n'est divisible par aucun entier premier, ce qui est équivalent à $X(\omega) = 1$. Donc on obtient :

$$\frac{1}{\zeta(s)} = P(X(\omega) = 1) = P(\cap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n)$$

Or la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ est décroissante, donc par la propriété de la continuité monotone, on aura :

$$\frac{1}{\zeta(s)} = P(\cap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$$

Ainsi pour tout $s > 1$, en en déduit

$$\zeta(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}. \text{ CQFD}$$

20. On suppose que la série des inverses des entiers premiers $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ converge.

- Puisque $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \sim \frac{1}{p_n}$, alors par le critère d'équivalence des séries numériques à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ converge aussi, or sa suite de somme partielle est exactement $(\ln u_n)_n$, elle sera donc convergente, et donc par continuité de la fonction l'exponentielle, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente vers un réel l .
- Puisque $s > 0$, on vérifie facilement que pour tout $k \geq 1$, on a

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

les termes étant positifs, en prenant le produit, on obtient, pour tout $n \geq 1$ et tout $s > 1$:

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \leq \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = u_n$$

Puis en faisant tendre n vers $+\infty$, on aura selon la question précédente :

$$\zeta(s) \leq l$$

Or on sait que $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ au voisinage de 1^+ , donc en particulier $\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s) = +\infty$, ce qui contredit l'inégalité $\forall s > 1, \zeta(s) \leq l$. On conclut alors que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ est divergente.

Fin du corrigé