ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

***

CONCOURS D'ADMISSION 1986

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

OPTIONS M, P' ET T.A.

(Durée 2 heures)

NOTA : Dans tout le problème, le corps de base est $\mathbb{R}$.

Les candidats indiqueront, en tête de leur copie, dans un encadré, le matériel de calcul utilisé :

- *calculatrice (marque et type) ;*
- *éventuellement tables numériques (éditeur et auteur).*

On définit une fonction numérique f en posant :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \quad \text{si } x \neq k\pi , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$f(0) = 0.$$

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé, l'unité de longueur étant représentée par deux centimètres sur les deux axes.

1° - a) Cette fonction admet, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre quatre défini par l'égalité :

$$f(x) = P(x) + x^4 \varepsilon(x),$$

où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 4, et où $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. On pose, A, B, C, D étant des constantes :

$$P(x) = A + B x + C x^2 + D x^3.$$

Calculer A, B, C, D sous forme de fractions irréductibles.

b) Calculer les valeurs décimales approchées à 10^{-4} près par défaut de $|I|$ et de $|J|$, en posant :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx \quad , \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(x)\, dx.$$

2° - Calculer, pour $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, la dérivée $f'(x)$; montrer que, pour $\cos x > 0$, son signe est celui du produit $\phi(x).\ \psi(x)$, où l'on a posé :

$$\phi(x) = x - \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \quad , \quad \psi(x) = x + \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} .$$

Montrer que la restriction de f à $]-\pi, \pi[$ est monotone ; on aura pour cela à exprimer la dérivée $\phi'(x)$ en fonction de $r = \sqrt{\cos x}$.

Tracer l'arc correspondant de (Γ).

3° - On suppose dans cette question $0 \leqslant x < \pi$.

a) Calculer $f''(x)$ pour $x \neq 0$. Montrer que le signe de $f''(x)$ est celui de :

$$s(x) = \sin x \left(\frac{1 + \cos^2 x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} - x.$$

b) Quel est le signe de $s(x)$ si $\frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi$? (On pourra utiliser une majoration très simple de $s(x)$).

c) On suppose $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. La signification de $s(x)$ étant celle indiquée ci-dessus, calculer $s'(x)$; montrer que le signe de $s'(x)$ est celui de $Q(m)$, où $m = \cos x$ et où Q est un polynôme de degré 9 à coefficients entiers relatifs, premiers entre eux dans leur ensemble, le terme de plus haut degré de $Q(m)$ étant $2\, m^9$.

Calculer $Q(1)$, $Q'(1)$, $Q''(1)$; que peut-on en conclure ?

Diviser $Q(m)$ par $(m - 1)^2$ selon les puissances décroissantes ; on note $R(m)$ le quotient obtenu.

Trouver le signe de $R(m)$ en supposant $0 \leqslant m \leqslant 1$ (on pourra, pour cela, procéder à un groupement convenable des termes de $R(m)$). En déduire les variations de $s(x)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Donner enfin le signe de $f''(x)$ lorsque $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

4° - a) Montrer que, sur $]\pi, 2\pi[$, f admet un minimum unique obtenu pour une valeur x_0.

b) Evaluer des valeurs décimales approchées de x_0 et de $f(x_0)$.

c) Quel est le signe de $f''(x)$ sur $]\pi, 2\pi[$? On justifiera la réponse.

5° - Dessiner l'arc de (Γ) correspondant à $\pi < x < 2\pi$.