

ANALYSE

PREMIERE PARTIE :

1. On remarque que $a(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$, ce qui définit une fonction continue sur I , et l'existence de primitives de a sur I est ainsi assurée. Une primitive de a sur I est alors par exemple A définie sur I par $A(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{1-x}$.
2. L'équation (E) est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre ; le coefficient devant y' ne s'annule pas sur I , on en déduit que les solutions de (E) sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \lambda e^{A(x)}$ où λ est un quelconque. Les solutions de (E) sur I sont donc les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{\lambda}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$.
3. f étant de classe \mathcal{C}^∞ sur I , elle admet un développement limité à tout ordre en 0 ; de plus,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}} &= (1+x+x^2+x^3+o(x^3)) e \cdot e^{x+x^2+x^3+o(x^3)} \\ &= e(1+x+x^2+x^3+o(x^3)) \left(1 + (x+x^2+x^3) + \frac{1}{2}(x+x^2+x^3)^2 + \frac{1}{6}(x+x^2+x^3)^3 + o(x^3) \right) \\ &= e(1+x+x^2+x^3+o(x^3)) \left(1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{13}{6}x^3+o(x^3) \right) \\ &= e \left(1+2x+\frac{7}{2}x^2+\frac{17}{3}x^3+o(x^3) \right) \end{aligned}$$

ce qui est le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f .

DEUXIEME PARTIE :

4. Soit $E = \{n \in \mathbb{N} ; \text{il existe un polynôme } P_n \text{ pour lequel } \forall x \in I, f^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}}\}$
 - $\forall x \in I, f^{(0)}(x) = P_0 \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}}$ pour le polynôme $P_0 = X$, ce qui prouve que $0 \in E$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$, si $n \in E$, alors soit P_n polynôme tel que $\forall x \in I, f^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}}$; f étant de classe \mathcal{C}^∞ peut dériver l'expression pour obtenir :

$$\forall x \in I, f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{1}{(1-x)^2} P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) + \frac{1}{(1-x)^2} P_n' \left(\frac{1}{1-x} \right) \right) e^{\frac{1}{1-x}}$$

Posons donc $P_{n+1} = X^2(P_n + P_n')$, P_{n+1} est un polynôme tel que

$$\forall x \in I, f^{(n+1)}(x) = P_{n+1} \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}}$$

ce qui démontre que $n+1 \in E$.

Le théorème de récurrence permet alors de conclure que $E = \mathbb{N}$, et donc que pour tout entier naturel n , il existe un polynôme P_n pour lequel $\forall x \in I, f^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}}$, de plus on a établi la relation : $P_{n+1} = X^2(P_n + P_n')$ pour tout entier naturel n .

5. On a déjà expliqué $P_0 = X$, et la relation précédente permet de calculer $P_1 = X^3 + X^2$, puis $P_2 = X^5 + 4X^4 + 2X^3$ enfin $P_3 = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4$.
6. D'après 2) f est une solution de (E) sur I , donc on a

$$\forall x \in I, (1-x^2) f'(x) = (2-x) f(x)$$

Dérivons cette expression n fois par la formule de Leibniz, il vient :

$$\forall x \in I, (1-x)^2 f^{(n+1)}(x) - 2n(1-x) f^{(n)}(x) + n(n-1) f^{(n-1)}(x) = (2-x) f^{(n)}(x) - n f^{(n-1)}(x)$$

Multiplions le tout par $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 e^{-\frac{1}{1-x}}$, et utilisons l'expression des dérivées successives de f obtenue à la question il vient :

$$P_{n+1} \left(\frac{1}{1-x} \right) - \left((2n+1) \frac{1}{1-x} + \left(\frac{1}{1-x} \right)^2 \right) P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) + \frac{n^2}{(1-x)^2} P_{n-1} \left(\frac{1}{1-x} \right) = 0$$

Le polynôme P_{n+1} et le polynôme $((2n+1)X + X^2)P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)$ coïncident donc au moins sur \mathbb{R}_+^* (puis $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ réalise une bijection de I sur \mathbb{R}_+^*) donc en une infinité de valeurs, ces polynômes sont donc égaux. Ainsi

$$P_{n+1} = [(2n+1)X + X^2] P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)$$

TROISIEME PARTIE :

7. D'après la définition de P_n , on a $a_n = f^{(n)}(0) = P_n(1)e$, d'où $a_{n+1} = ((2n+1) + 1)a_n - n^2 a_{n-1}$, soit

$$a_{n+1} = (2n+2)a_n - n^2 a_{n-1}$$

8. (a) On a calculé P_0, P_1, P_2, P_3 , on en déduit $a_0 = e$, $a_1 = 2e$, $a_2 = 7e$ et $a_3 = 34e$, puis $a_4 = 8a_3 - 9a_2 = 209e$.
(b) f étant de classe \mathcal{C}^∞ son développement limité à l'ordre 4 en 0 est obtenu par la formule de Taylor Young :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{a_3}{3!} x^3 + \frac{a_4}{4!} x^4 + o(x^4)$$

Tous les calculs ont été faits précédemment :

$$f(x) = e \left(1 + 2x + \frac{7}{2} x^2 + \frac{17}{3} x^3 + \frac{209}{24} x^4 + o(x^4) \right)$$

remarque : on vérifie d'ailleurs ainsi que le résultat trouvé en 3) a de grandes chances d'être correct...

9. Soit $p \in \mathbb{N}$. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre p à la fonction exponentielle entre 0 et 1

$$e^1 = \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} e^t dt$$

Mais par croissance de l'intégrale et grâce à l'encadrement $0 \leq \frac{(1-t)^p}{p!} e^t \leq \frac{1}{p!}$ valable pour tout réel $t \in [0, 1]$, on déduit

$$0 \leq e - \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{p!}$$

et le théorème d'encadrement des limites permet alors de conclure : $\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} = e$.

10. (a) D'une part $S_p(0) = \sum_{i=0}^p \frac{i!}{(i!)^2} = u_p$, d'autre part,
pour $i \geq 1$, $(i+1)! = [(i-1)!] \times i(i+1) = i^2(i-1)! + i!$, donc pour tout $i \geq 1$,

$$\frac{(i+1)!}{(i!)^2} = \frac{(i-1)!}{((i-1)!)^2} + \frac{1}{i!}$$

D'où en sommant :

$$\begin{aligned} S_p(1) &= 1 + \sum_{i=1}^p \frac{(i+1)!}{(i!)^2} \\ &= \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{1}{i!} \right) + \sum_{i=1}^p \frac{(i-1)!}{((i-1)!)^2} \end{aligned}$$

On en déduit après changement d'indice $i' = i - 1$ dans la deuxième somme, la relation

$$S_p(1) = u_p + u_{p-1}$$

(b) Il en résulte immédiatement d'après 9)

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} S_p(0) = e \text{ et } \lim_{p \rightarrow +\infty} S_p(1) = 2e$$

11. D'abord :

$$S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2S_p(n-1) = \sum_{i=0}^p \frac{(n+i+1)! - (2n+2)(n+i)! + n^2(n+i-1)!}{(i!)^2}$$

Ensuite, on peut simplifier le terme général de la somme de droite :

$$\begin{aligned} \frac{(n+i+1)! - (2n+2)(n+i)! + n^2(n+i-1)!}{(i!)^2} &= \frac{(n+i-1)! [(n+i+1)(n+i) - (2n+2)(n+i) + n^2]}{(i!)^2} \\ &= \frac{(n+i-1)! (i^2 - i - n)}{(i!)^2} \end{aligned}$$

D'où pour tout $i \geq 1$, $\frac{(n+i+1)! - (2n+2)(n+i)! + n^2(n+i-1)!}{(i!)^2} = \frac{(n+i-1)!}{((i-1)!)^2} - \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$, et donc en revenant à la somme :

$$\begin{aligned} S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2S_p(n-1) &= -n! + \sum_{i=1}^p \frac{(n+i-1)!}{((i-1)!)^2} - \sum_{i=1}^p \frac{(n+i)!}{(i!)^2} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} - \sum_{i=0}^p \frac{(n+i)!}{(i!)^2} \\ &= S_{p-1}(n) - S_p(n) \end{aligned}$$

On a démontré la relation :

$$S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

12. Considérons l'ensemble $E' = \left\{ n \in \mathbb{N} ; (S_p(n))_{p \in \mathbb{N}} \text{ converge} \right\}$

- On a montré en 10.b) que $0, 1 \in E'$
- Si un entier naturel non nul n vérifie : $\begin{cases} n-1 \in E' \\ n \in E' \end{cases}$ alors $(S_p(n+1))_{p \in \mathbb{N}}$ étant combinaison linéaire des suites $(S_p(n))_{p \in \mathbb{N}}$ et $(S_{p-1}(n))_{p \in \mathbb{N}}$ (avec de "vrais" coefficients indépendants de p) on en déduit que $(S_p(n+1))_{p \in \mathbb{N}}$ converge aussi, et donc $n+1 \in E'$.

Le théorème de récurrence double permet alors de conclure que $E' = \mathbb{N}$ et donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(S_p(n))_{p \in \mathbb{N}}$ converge.

13. Passons à la limite lorsque $p \rightarrow +\infty$ dans la relation établie précédemment :

$$S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

et appelons b_n la limite de $(S_p(n))_{p \in \mathbb{N}}$ pour chaque entier n , on obtient :

$$b_{n+1} - (2n+2)b_n + n^2b_{n-1} = b_n - b_n$$

et on en déduit que les suites (a_n) et (b_n) vérifient la même relation de récurrence double.

Mais de plus, $b_0 = e = a_0$ et $b_1 = 2e = a_1$; on en déduit que les suites (a_n) et (b_n) sont égales, c'est-à-dire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} S_p(n) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^p \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$$

Enfin, en remarquant $\binom{n+i}{n} \times \frac{1}{i!} = \frac{(n+i)!}{n!(i!)^2}$, on peut aussi écrire :

$$a_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^p \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \lim_{p \rightarrow +\infty} n! \sum_{i=0}^p \binom{n+i}{n} \cdot \frac{1}{i!}$$

ALGEBRE ET GEOMETRIE

PREMIERE PARTIE :

1. On lit sur la matrice J , $f(\vec{u}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{k} + \vec{i} + \vec{j}) = \vec{u}$.

D'autre part soit, $\vec{v} \in \vec{E}$ et (x, y, z) ses coordonnées dans B . $f(\vec{v})$ a alors pour coordonnées (y, z, x) donc

$$\begin{aligned}\vec{v} \in Q &\iff x + y + z = 0 \\ &\iff y + z + x = 0 \\ &\iff f(\vec{v}) \in Q\end{aligned}$$

Donc Q est stable par f .

2. (a) Q est en fait le plan de vecteur normal \vec{u} , donc $\vec{v} \in Q \iff \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$, ce que l'on vérifie aisément

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) = 0, \text{ donc } \vec{v} \in Q; \text{ d'autre part, } \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}, \text{ donc } \vec{w} \perp \vec{u}, \text{ et donc a}$$

$\vec{w} \in Q$; enfin, \vec{u} et \vec{v} étant deux vecteurs orthogonaux non nuls, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthogonale de \vec{E} donc (\vec{v}, \vec{w}) est une famille libre de deux vecteurs dans Q , qui est de dimension 2, donc (\vec{v}, \vec{w}) est une base de Q .

(b) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale directe, mais n'est pas une base orthonormée, puisque $\|\vec{v}\|^2 = \frac{3}{2}$

(c) On a vu que $\vec{v} \in Q$, que Q est stable par f et que Q a pour base (\vec{v}, \vec{w}) , donc il existe deux réels α et β que $f(\vec{v}) = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$.

De plus, puisque (\vec{v}, \vec{w}) est orthogonale, on a $\alpha = \frac{f(\vec{v}) \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$ et $\beta = \frac{f(\vec{v}) \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}$. On calcule alors les coordonnées de $f(\vec{v})$ puis les produits scalaires dans la base orthonormée directe B :

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{k} \\ \\ \end{pmatrix} \\ f(\vec{v}) \cdot \vec{v} &= \left(\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) = -\frac{3}{4} \\ f(\vec{v}) \cdot \vec{w} &= \left(\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right) = \frac{-3\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

D'où on déduit $\alpha = \frac{-1}{2}$ et $\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. On a donc déjà démontré $f(\vec{v}) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \vec{v} + \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \vec{w}$.

Enfin, le calcul matriciel de $f(\vec{w})$ donne $f(\vec{w}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\vec{i} - \vec{j})$, mais d'autre part :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{v} - \frac{1}{2} \vec{w} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\vec{i} - \frac{1}{2} \vec{j} - \frac{1}{2} \vec{k} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{k} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{k}$$

Donc $f(\vec{w}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{v} - \frac{1}{2} \vec{w} = -\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \vec{v} + \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \vec{w}$. D'où pour $\theta = -\frac{2\pi}{3}$, on a

$$f(\vec{v}) = \cos(\theta) \vec{v} + \sin(\theta) \vec{w} \text{ et } f(\vec{w}) = -\sin(\theta) \vec{v} + \cos(\theta) \vec{w}$$

(d) La restriction de f au plan Q est donc la rotation vectorielle d'angle $-\frac{2\pi}{3}$. (ces deux applications linéaires coïncident en effet sur la base (\vec{v}, \vec{w}) donc aussi sur le plan Q qu'elle engendre).

DEUXIEME PARTIE :

3. (a) On obtient $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ c'est-à-dire $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{bmatrix}$.

(b) Le calcul donne immédiatement $P\bar{P} = 3I$, en tenant compte de la relation $1 + j + j^2 = 0$.

4. (a) On effectue les produits matriciels :

$$\begin{aligned} \bullet JX_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = X_1 \\ \bullet JX_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{bmatrix} = jX_2 \\ \bullet JX_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{bmatrix} = j^2X_3 \end{aligned}$$

(b) On a donc

$$J[X_1 \ X_2 \ X_3] = [JX_1 \ JX_2 \ JX_3] = [X_1 \ jX_2 \ j^2X_3],$$

mais aussi

$$[X_1 \ X_2 \ X_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{bmatrix} = [X_1 \ jX_2 \ j^2X_3],$$

Par définition de $M(a, b, c)$ d'où en posant $\Delta = \text{diag}(1, j, j^2)$, il vient $JP = P\Delta$.

5. (a) La matrice $M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ commute avec J si et seulement si :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Soit si et seulement si

$$\begin{bmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix}$$

Donc si et seulement si $\begin{cases} a_1 = b_2 = c_3 \\ a_2 = b_3 = c_1 \\ a_3 = b_1 = c_2 \end{cases}$; ainsi M commute avec J si et seulement si il existe trois complexes a, b, c tels que $M = aI + bJ + cJ^2$. Ce qui se traduit en disant que $C(J)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ engendré par la famille (I, J, J^2) .

(b) Cette famille est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, c'est donc une base de $C(J)$, qui par suite est de dimension 3.

6. (a) Par définition de $M(a, b, c)$, on a

$$\begin{aligned} P^{-1}M(a, b, c)P &= P^{-1}(aI + bJ + cJ^2)P \\ &= aI + bP^{-1}JP + cP^{-1}J^2P \end{aligned}$$

Or d'après 4.b) $P^{-1}JP = \Delta$ et par suite $P^{-1}J^2P = (P^{-1}JP)^2 = \Delta^2$, d'où on déduit :

$$P^{-1}M(a, b, c)P = \text{diag}(a + b + c, a + bj + cj^2, a + bj^2 + cj)$$

(b) Par la règle de Sarrus, $\det(M(a, b, c)) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, et $D(a, b, c)$ étant diagonale, son déterminant est le produit des éléments diagonaux, donc $\det(D(a, b, c)) = (a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$.

(c) Mais on a la relation $P^{-1}M(a, b, c)P = D(a, b, c)$ et

- le déterminant d'un produit matriciel est le produit des déterminants
- le déterminant de l'inverse d'une matrice inversible est l'inverse du déterminant,

d'où $\det(M(a, b, c)) = \det(D(a, b, c))$. Ce qui fournit la factorisation demandée :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$$

(d) $M(a, b, c)$ est singulière si et seulement si son déterminant est nul, donc d'après la forme factorisée précédent

$$\text{et seulement si } \begin{cases} (a + b + c) = 0 \\ \text{ou } (a + bj + cj^2) = 0 \\ \text{ou } (a + bj^2 + cj) = 0 \end{cases} .$$

Or $(a + b + c) = 0$ se traduit géométriquement par O est l'isobarycentre de (A, B, C) et

(T) est équilatéral si et seulement si les affixes respectives de A, B, C vérifient $\frac{b-a}{c-a} = \pm e^{\frac{2i\pi}{3}}$ (traduction

$AB = AC$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi]$. Enfin, $\frac{b-a}{c-a} = \pm j^2$ s'écrit encore $\begin{cases} (a + bj + cj^2) = 0 \\ \text{ou } (a + bj^2 + cj) = 0 \end{cases}$, donc finalement

$M(a, b, c)$ est singulière si et seulement si O est centre de gravité de (T) ou (T) est équilatéral

TROISIEME PARTIE :

7. Notons que les relations traduisant les barycentres $\begin{cases} a_{n+1} = \lambda b_n + (1-\lambda)c_n \\ b_{n+1} = (1-\lambda)a_n + \lambda c_n \\ c_{n+1} = \lambda a_n + (1-\lambda)b_n \end{cases}$ s'écrivent matriciellement

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 1-\lambda & 0 \end{bmatrix} Y_n \\ &= (\lambda J + (1-\lambda)J^2) Y_n \\ &= M(0, \lambda, 1-\lambda) Y_n \end{aligned}$$

Passons alors à la relation de récurrence sur les vecteurs $Z_n = P^{-1}Y_n$:

$$Z_{n+1} = P^{-1}M(0, \lambda, 1-\lambda)PY_n$$

Et donc d'après les résultats de la deuxième partie :

$$Z_{n+1} = D(0, \lambda, 1-\lambda)Z_n$$

8. Toujours d'après la deuxième partie, et sachant que les produits de matrices diagonales sont des matrices diagonales dont les éléments diagonaux sont obtenus par produits terme à terme, il vient :

$$(D(0, \lambda, 1-\lambda))^n = \text{diag}(1, \lambda j + (1-\lambda)j^2)^n = \text{diag}\left(1, (\lambda j + (1-\lambda)j^2)^n, (\lambda j^2 + (1-\lambda)j)^n\right)$$

9. (a) On met le nombre complexe $\lambda j + (1-\lambda)j^2$ sous forme algébrique : $\lambda j + (1-\lambda)j^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(2\lambda - 1)$, et en déduit

$$|\lambda j + (1-\lambda)j^2|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(2\lambda - 1)^2$$

Donc $|\lambda j + (1-\lambda)j^2| < 1$ si et seulement si $\frac{3}{4}(2\lambda - 1)^2 < \frac{3}{4}$ ce qui équivaut à $\lambda \in]0, 1[$. On en déduit $((\lambda j + (1-\lambda)j^2)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\lambda \in]0, 1[$.

(b) Si cette condition est vérifiée, alors on a aussi $|\overline{\lambda j + (1-\lambda)j^2}| < 1$, soit $|\lambda j^2 + (1-\lambda)j| < 1$ et donc la suite

géométrique $((\lambda j^2 + (1-\lambda)j)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi. Notons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. On

$Z_n = (D(0, \lambda, 1-\lambda))^n Z_0$, donc

$$\begin{cases} x_n = x_0 \\ y_n = (\lambda j + (1-\lambda)j^2)^n y_0 \\ z_n = (\lambda j^2 + (1-\lambda)j)^n z_0 \end{cases}$$

et donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x_0 , $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Mais de plus $Y_n = PZ_n$, donc les suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ sont combinaison linéaire des suites $(x_n), (y_n)$ et (z_n) . La convergence de ces dernières permet alors d'assurer que lorsque $\lambda \in]0, 1[$ les suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) sont convergentes.

10. (a) On a montré en III.7) la relation $Y_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 1-\lambda & 0 \end{bmatrix} Y_n$, donc

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} &= (\lambda b_n + (1-\lambda) c_n) + ((1-\lambda) a_n + \lambda b_n) + (\lambda a_n + (1-\lambda) b_n) \\ &= a_n + b_n + c_n \end{aligned}$$

(b) Lorsque $\lambda \in]0, 1[$, on peut passer à la limite dans la relation de récurrence matricielle précédente. Posons $l_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, $l_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ et $l_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$, il vient :

$$\begin{cases} l_1 = \lambda l_2 + (1-\lambda) l_3 \\ l_2 = (1-\lambda) l_1 + \lambda l_3 \\ l_3 = \lambda l_1 + (1-\lambda) l_2 \end{cases}$$

Remplaçons la deuxième ligne de ce système par elle-même multipliée par $(1-\lambda)$ additionnée de la première ligne multipliée par $-\lambda$, on en déduit :

$$\begin{cases} l_1 = \lambda l_2 + (1-\lambda) l_3 \\ -\lambda l_1 + (1-\lambda) l_2 = -\lambda^2 l_2 + (1-\lambda)^2 l_1 \\ l_3 = \lambda l_1 + (1-\lambda) l_2 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} l_1 = \lambda l_2 + (1-\lambda) l_3 \\ (1-\lambda + \lambda^2) l_1 = (1-\lambda + \lambda^2) l_2 \\ l_3 = \lambda l_1 + (1-\lambda) l_2 \end{cases}$$

Enfin comme $(1-\lambda + \lambda^2)$ ne s'annule pas sur $]0, 1[$ on en déduit $l_1 = l_2$ puis $l_3 = l_1$, donc si les suites (a_n) , (b_n) , (c_n) convergent, alors elles ont même limite l .

(c) Enfin sachant que la suite $(a_n + b_n + c_n)$ est constante égale à $a + b + c$, on peut conclure en passant de nouveau à la limite $3l = a + b + c$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{a + b + c}{3}$$