OPTIONS M ET P' - 2EME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve commune aux candidats des options M et P' comporte 3 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

----

1 - On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites finies strictement croissantes de points de l'intervalle réel $[-1,+1]$.

2 - Tout élément S de $\mathcal{S}$, avec $S = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, où $-1 \leqslant x_0 < x_1 < \dots < x_n \leqslant 1$, est appelé système d'interpolation d'ordre n sur l'intervalle $[-1,+1]$.

3 - Un système d'interpolation d'ordre n, soit S, sur $[-1,+1]$ étant défini par la suite strictement croissante $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, pour tout entier k, $k \in \{0,1,-,n\}$, on pose :

$$\omega_{k,S}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k) \quad \text{et} \quad L_{k,S}(x) = \frac{\omega_{n,S}(x)}{\omega'_{n,S}(x_k)(x-x_k)}$$

$\omega'_{n,S}$ désignant selon l'usage la dérivée du polynôme $\omega_{n,S}$; par convention $\omega_{-1,S}(x) = 1$.
Les polynômes $\omega_{k,S}$ $(-1 \leqslant k \leqslant n)$ (resp. $L_{k,S}$: $(0 \leqslant k \leqslant n)$) s'appellent les polynômes élémentaires (resp. les polynômes fondamentaux) associés au système d'interpolation S.

4 - Etant donné une fonction f, réelle ou complexe, définie sur l'intervalle $[-1,+1]$ et un élément S de $\mathcal{S}$, on dit qu'un polynôme P à coefficients réels ou complexes est un polynôme interpolateur pour le couple (f,S), si pour tout x de S, $P(x) = f(x)$.

Si la fonction f est p fois dérivable sur $[-1,+1]$, on dira qu'un polynôme P est un polynôme interpolateur d'ordre p pour le couple (f,S) si :

$$(\forall k \in \{0,1,\dots,p\}) \quad (P^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)) \quad \text{pour tout } x \text{ élément de } S.$$

où $P^{(k)}$ (resp. $f^{(k)}$) désigne la dérivée d'ordre k de P (resp. de f) ; par convention $P^{(0)} = P$ (resp. $f^{(0)} = f$).

5 - $\mathcal{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels ou complexes de degré inférieur ou égal à n.

6 - Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-1,+1]$ dans $\mathbb{C}$; les opérations :

$$\begin{cases} (f,g) \in E \times E \longmapsto f+g \in E & \text{avec } (f+g)(x) = f(x)+g(x) \text{ pour tout } x \in [-1,+1] \\ (\lambda,f) \in \mathbb{C} \times E \longmapsto \lambda . f \in E & \text{avec } (\lambda . f)(x) = \lambda f(x) \text{ pour tout } x \in [-1,+1] \\ (f,g) \in E \times E \longmapsto f . g \in E & \text{avec } (f . g)(x) = f(x).g(x) \text{ pour tout } x \in [-1,+1] \end{cases}$$

confèrent à E une structure d'algèbre sur le corps des complexes $\mathbb{C}$.

.../...

7 - On rappelle que l'application de E dans $[o, +\infty[$ qui à toute fonction f associe le réel $\|f\| = \sup_{t\in[-1,+1]} |f(t)|$ est une norme sur E (norme de la convergence uniforme pour les fonctions continues sur l'intervalle $[-1,+1]$).

Du point de vue topologique E sera regardé comme muni de la topologie associée à cette norme.

8 - Dans tout espace métrique $\mathcal{E}$, une partie A est dite partout dense dans $\mathcal{E}$, si son adhérence, notée $\bar{A}$, coïncide avec $\mathcal{E}$.

PARTIE I

Dans toute cette partie, on suppose donné un système d'interpolation S d'ordre n sur $[-1,+1]$, définie par la suite strictement croissante $(x_i)_{o\leqslant i\leqslant n}$.

1 - Montrer qu'à tout élément f de E est associé un polynôme $P_{f,S}$, et un seul, élément de $\mathcal{P}_n$, qui soit interpolateur pour le couple (f,S).

Exprimer le polynôme $P_{f,S}$ à l'aide des polynômes fondamentaux associés au système S.

Montrer que l'application $f \longmapsto P_{f,S}$ de E dans $\mathcal{P}_n$ est une application linéaire.

2 - Pour tout k entier, $k = o, 1, -, n-1, n$, on pose $e_k(x) = x - x_k$.

a) Démontrer que les polynômes $(L^2_{k,S}, e_k L^2_{k,S})_{o\leqslant k\leqslant n}$ forment une base de $\mathcal{P}_{2n+1}$.

b) f appartenant à E, on suppose en outre que f est dérivable sur $[-1,+1]$.

Démontrer qu'il existe un polynôme $Q_{f,S}$, et un seul, de $\mathcal{P}_{2n+1}$, qui soit un polynôme interpolateur d'ordre 1 pour le couple (f,S).

Déterminer les composantes de $Q_{f,S}$ dans la base précédente de $\mathcal{P}_{2n+1}$.

3 - On suppose f p fois dérivable sur $[-1,+1]$, $(p \geqslant 1)$. Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme interpolateur d'ordre p pour le couple (f,S) qui soit de degré inférieur ou égal à $n(p+1) + p$.

4 - Soient $m_0, m_1, -, m_n$, $n+1$ entiers donnés, tels que $m_i \geqslant 1$ pour tout i ; on désigne par ν le plus grand de ces entiers et par N l'entier $N = (n+1)\nu$.

Montrer que pour toute fonction f élément de E, suffisamment dérivable sur $[-1,+1]$, il existe R élément de $\mathcal{P}_{N-1}$, tel que pour tout i entier, $i = o, 1, -, n$, x_i soit un zéro d'ordre m_i au moins pour la fonction $x \longmapsto f(x) - R(x)$.

R est-il unique ?

PARTIE II

Dans toute cette partie l'entier $n > o$, et la fonction f élément de E sont donnés.

1 - Soit T_{n+1} la fonction définie sur l'intervalle $[-1,+1]$ par :

$$(\forall x \in [-1,+1]) \qquad T_{n+1}(x) = 2^{-n}\cos[(n+1)\,\mathrm{Arc}\cos x].$$

.../...

a) Démontrer que T_{n+1} est la restriction à $[-1,+1]$ d'une fonction polynôme de degré $n+1$. Quel est le coefficient du terme de plus haut degré ?

b) Montrer que T_{n+1} est solution particulière sur $[-1,+1]$ d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

c) Déterminer les zéros de T_{n+1}. On les explicitera de manière à les organiser en un système d'interpolation de $[-1,+1]$, $S = \{x_{o,n}, x_{1,n}, \dots, x_{k,n}, \dots, x_{n,n}\}$

2 - a) Démontrer qu'il existe un polynôme, et un seul, de $\mathcal{P}_{2n+1}$, soit Q_{2n+1}, qui soit interpolateur pour le couple (f,S) et tel que le polynôme dérivé soit interpolateur pour le couple (o,S).

Montrer l'existence de polynômes $h_{k,n}$ que l'on définira à l'aide des polynômes fondamentaux de S, ainsi que leurs dérivées, tels que :

$$Q_{2n+1}(x) = \sum_{k=o}^{n} f(x_{k,n})\, h_{k,n}(x) .$$

b) Démontrer la formule : $2\, L'_{k,S}(x) = \dfrac{T''_{n+1}(x)}{T'_{n+1}(x)}$ pour $x = x_{k,n}$.

c) En déduire que :

$$h_{k,n}(x) = 2^{2n}\, \frac{1 - x.x_{k,n}}{(n+1)^2}\, \frac{T^2_{n+1}(x)}{(x - x_{k,n})^2} \quad \text{pour tout } x \text{ de } [-1,+1] .$$

et que $\displaystyle\sum_{k=o}^{n} h_{k,n}(x) = 1$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1,+1]$.

3 - a) $\varepsilon > o$ étant donné, justifier l'existence d'un réel $\delta > o$ tel que si x' et x'' appartiennent à $[-1,+1]$ et vérifient l'inégalité $|x' - x''| < \delta$ alors $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

b) Démontrer que pour tout x de $[-1,+1]$, on a :

$$|f(x) - Q_{2n+1}(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{4\,\|f\|}{(n+1)\,\delta^2}$$

(On pourra écrire le premier membre de cette inégalité sous la forme d'une somme de deux termes, chacun des termes étant lui-même une somme finie, la première étant indexée par les entiers k tels que $|x - x_{k,n}| < \delta$).

Que peut-on conclure de ce résultat ?

PARTIE III (Applications)

A-1 : Soit f un élément de E ; on suppose que $\displaystyle\int_{-1}^{+1} f(x)\, x^n\, dx = o$ pour tout entier n. Montrer que f est la fonction nulle.

A-2 : Soit A une sous-algèbre de E et f un élément de A. Démontrer que l'application : $x \longmapsto |f(x)|$ est un élément de l'adhérence de A, $\bar{A}$, *si $\bar{f}$ appartient aussi à A.*

A-3 : En admettant que toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est encore dénombrable, montrer qu'il existe une suite de points de E partout dense dans E.

FIN