(version samedi 21 avril 2001 : 21h50)

nom :

spé MP1 carnot DIJON

Bibliographie utile pour la Méthode de GAUSS-JACOBI

ENS Ulm et Sèvres 1979 épreuve pratique 3h ; Solutions numériques des équations algébriques Tome II systèmes de plusieurs équations, valeurs propres des matrices pages 231-246 et 92, par E. DURAND Doyen de la Faculté des sciences de Toulouse Masson et Cie 1961 ; Ciarlet (1982) ; CCP 1997 math 2 PSI (contre exemple de Hansen 1963 : on cyclic Jacobi method SIAM 11 qui a été suivie par Forsythe et Henrici "The cyclic jacobi method for computing" TAMS 1960)

Le portrait de Jacobi de trouve dans "les mathématiques" par Roger Caratini (Bordas 1985) page 114 ISBN 2-04-015392-6 ; Carl Jacobi (1804-1851) est un mathématicien allemand, qui a étudié en même temps qu'Abel, la théorie des fonctions elliptiques, et introduit en analyse les fonctions dites "fonctions θ" (*) ; on lui doit aussi la théorie des déterminants fonctionnels (jacobiens) :

(*) La relation fonctionnelle $\theta_3^4 = \theta_0^4 + \theta_2^4$ et son lien avec la théorie des réseaux est étudiée dans un article passionnant de l'Enseignement mathématique Genève 1956 pages 258-261 : l'auteur est Balth VAN DER POL ! (Rappel $\theta_3(0,\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2}$; $\theta_0(0,\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2}$; $\theta_2(0,\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{(n+1/2)^2}$; avec $q = e^{i\pi\tau}$, et $\mathrm{Im}(\tau) > 0$; τ est appelé le module des fonctions θ ; le lien avec les sommes de Gauss serait intéréssant).

Partie I - Une norme sur $\mathbf{Mat}(\mathbf{n},\mathbb{R})$

(I.A) Tr(AB)=Tr(BA) :

Il suffit d'écrire $Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \Big[\sum_{k=1}^{n} a_{i,j} b_{k,i} \Big] =_{\text{permutation des sommations finies, et R commutatif}} \sum_{k=1}^{n} \Big[\sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} \Big] = Tr(BA).$

(I.B) Produit scalaire : On peut vérifier que ϕ est bilinéaire, définie, positive, mais il est plus simple de remarquer que : $\phi(A,B) = \sum_{i=1}^{n} \Big[\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{i,k} \Big] = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j} b_{i,j}$, donc ϕ est le produit scalaire canonique sur $M_n(\mathbb{R})$; en particulier $\boxed{\sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in[[\mathbf{1},\mathbf{n}]]^2} \mathbf{a}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}^{\mathbf{2}} = ||\mathbf{A}||^{\mathbf{2}}}$

(I.C) Inégalité à montrer : L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ dans $\mathbb{R}^n$, appliquée aux vecteurs $\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donne $\Big[\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \Big]^2 \le \big(\sum_{i=1}^{n} 1^2 \big) \big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2 \big) = n \sum a_{i,i}^2 \le n||A||^2$; donc $Tr(A)| \le \sqrt{n}||A||$ et donc $|||Tr(||| \le \sqrt{n}$.

Mais $|Tr(I_n)| = n = \sqrt{n}||I_n||$ donc $\boxed{|||\mathbf{Tr}||| = \sqrt{\mathbf{n}}}$

(I.D) $||\mathbf{\Omega A}|| = ||\mathbf{A}||$:

- $||\Omega A||^2 = Tr[\Omega A^t A^t \Omega] = Tr[(\Omega A^t A)^t \Omega] = Tr[^t\Omega(\Omega A^t A)] = Tr[(^t\Omega\Omega) A^t A] = Tr(I_n . A^t A) = Tr(A^t A) = ||A||^2$.

■ **B est symétrique :** En effet $^tB =^t (^t\Omega A \Omega) =^t \Omega^t A \Omega =^t \Omega A \Omega = B$.

■ **Égalité de deux sommes à démontrer :**

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^2 = ||B||^2 = ||^t\Omega A \Omega||^2 = Tr[(^t\Omega A\Omega)^t(^t\Omega A \Omega)] = Tr[(^t\Omega A \Omega)(^t\Omega^t A \Omega)] = Tr[(^t\Omega A)(\Omega^t\Omega)^t A \Omega] =$$

$$Tr[^t\Omega A (I_n)^t A \Omega] = Tr(^t\Omega A^t A \Omega] =_{I.A} Tr[(A^t A\Omega)^t\Omega] = Tr(A^t A) = ||A||^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

Partie II - Diagonalisation pour n=2

(II.A) Calculer B : $B =^t \Omega A \Omega = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1}\cos\theta - a_{1,2}\sin\theta & a_{1,1}\sin\theta + a_{1,2}\cos\theta \\ a_{1,2}\cos\theta - a_{2,2}\sin\theta & a_{1,2}\sin\theta + a_{2,2}\cos\theta \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1}\cos^2\theta + a_{2,2}\sin^2\theta - a_{1,2}\sin(2\theta) & a_{1,2}\cos(2\theta) + \frac{1}{2}(a_{1,1}-a_{2,2})\sin(2\theta) \\ a_{1,2}\cos(2\theta) + \frac{1}{2}(a_{1,1}-a_{2,2})\sin(2\theta) & a_{1,1}\sin^2\theta + a_{2,2}\cos^2\theta + a_{1,2}\sin(2\theta) \end{bmatrix}, \text{ par conséquent :}$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1}\cos^2\theta + a_{2,2}\sin^2\theta - a_{1,2}\sin(2\theta) & a_{1,2}\cos(2\theta) + \frac{1}{2}(a_{1,1}-a_{2,2})\sin(2\theta) \\ a_{1,2}\cos(2\theta) + \frac{1}{2}(a_{1,1}-a_{2,2})\sin(2\theta) & a_{1,1}\sin^2\theta + a_{2,2}\cos^2\theta + a_{1,2}\sin(2\theta) \end{bmatrix}}$$

(II.B) Égalité à montrer : D'après (I.D) comme A et B sont symétriques $b_{1,1}^2 + b_{2,2}^2 + 2b_{2,1}^2 = ||B||^2 = ||A||^2 = a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + 2a_{2,1}^2$.

(II.C) Existence de θ : $b_{1,2} = a_{1,2}\cos(2\theta) + \frac{1}{2}(a_{1,1}-a_{2,2})\sin(2\theta)$; Distinguons deux cas (ce n'est pas indispensable mais l'énoncé le suggère) :

- **Cas 1 :** $\boxed{\mathbf{a_{1,1} = a_{2,2}}}$

$b_{1,2} = 0 \iff \cos(2\theta) = 0$ car $a_{1,2} \neq 0$; donc $b_{1,2} = 0 \iff \theta \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ et l'équation n'a qu'une solution dans $]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}]$: $\theta = \frac{\pi}{4}$.

- **Cas 2 :** $\boxed{\mathbf{a_{1,1} \neq a_{2,2}}}$ Alors $b_{1,2} = 0 \implies \cos(2\theta) \neq 0$ et $b_{1,2} = 0 \iff \tan(2\theta) = -\frac{2a_{1,2}}{a_{1,1}-a_{2,2}} \iff \theta \in -\frac{1}{2}Arctan\left[\frac{2a_{1,2}}{a_{1,1}-a_{2,2}}\right] + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ et l'équation n'a aussi qu'une solution dans $]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}]$: $\theta = -\frac{1}{2}Arctan\left[\frac{2a_{1,2}}{a_{1,1}-a_{2,2}}\right]$. Par

conséquent $\boxed{\mathbf{A} \mapsto \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \textbf{si } \mathbf{a_{1,1} = a_{2,2}} \\ -\frac{1}{2}\mathbf{Arctan}\left[\frac{\mathbf{2a_{1,2}}}{\mathbf{a_{1,1}-a_{2,2}}}\right] & \textbf{si } \mathbf{a_{1,1} \neq a_{2,2}} \end{cases}}$

(II.D) Pour ce Choix B est diagonale : B est symétrique et $b_{1,2} = 0$, donc B est diagonale. Comme $B = \Omega^{-1}A\Omega$, B est semblable à A, donc $spectre(B) = spectre(A)$ et donc $\boxed{\mathbf{Spectre(A) = \{b_{1,1}, b_{2,2}\}}}$

(II.E) Exemple : On applique la formule trouvée en (II.C) et ici $\boxed{\mathbf{F(A) = -\frac{1}{2}Arctan(\frac{24}{7})}}$

Donc $\tan(2\theta) = -\frac{24}{7}$ donc $\cos(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{24}{7})^2}} = \frac{7}{25}$ car $\cos(2\theta) > 0$ et $\sin(2\theta) = \cos(2\theta)\tan(2\theta) = -\frac{24}{25}$.

Or $b_{1,1} = a_{1,1}\left[\frac{\cos(2\theta)+1}{2}\right] + a_{2,2}\left[\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right] - a_{1,2}\sin(2\theta) = 2$.

$b_{2,2} = a_{1,1}\left[\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right] + a_{2,2}\left[\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right] + a_{1,2}\sin(2\theta) = -3$.

Donc $\boxed{\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \textbf{ et } \mathbf{Sp(A) = Sp(B) = \{2, -3\}}}$

De plus $A = \Omega B \Omega^{-1}$, avec B diagonale, donc $\left(\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}\right)$ est une base (orthonormée) de vecteurs propres de A.

Comme $\cos\theta \neq 0$ une autre base de diagonalisation est :

$$\left(2\cos\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, 2\cos\theta \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} \cos(2\theta)+1 \\ -\sin(2\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(2\theta) \\ \cos(2\theta)+1 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} \frac{32}{25} \\ \frac{24}{25} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{24}{25} \\ \frac{32}{25} \end{pmatrix}\right).$$

Finalement $\boxed{\mathbf{E_2} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \;\Big|\; \mathbf{E_{-3}} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}}$

Partie III - Quelques résultats généraux

(III.A) B est symétrique : Ω étant clairement orthogonale, la question (I.D) donne le résultat.

(III.B.1) Calcul des coefficients de M :

En effectuant le produit ligne par colonne on a immédiatement : $\boxed{\begin{cases} m_{i,j} = a_{i,j} & \textbf{si } j \notin \{p, q\} \\ \mathbf{m_{i,p}} = \cos\theta\mathbf{a_{i,p}} - \sin\theta\mathbf{a_{i,q}} \\ \mathbf{m_{i,q}} = \sin\theta\mathbf{a_{i,p}} + \cos\theta\mathbf{a_{i,q}} \end{cases}}$

(III.B.2) Calcul des coefficients de B : On multiplie la matrice M précédente à gauche par ${}^t\Omega$ et en faisant le produit ligne par colonne on a :

$$\begin{cases} b_{i,j} = a_{i,j} & \text{pour } i \notin \{p,q\} \text{ et } j \notin \{p,q\} \\ b_{i,p} = m_{i,p} = \cos\theta a_{i,p} - \sin\theta a_{i,q} & \text{si } i \notin \{p,q\} \\ b_{i,q} = m_{i,q} = \sin\theta a_{i,p} + \cos\theta a_{i,q} & \text{si } i \notin \{p,q\} \\ b_{p,q} = \cos\theta m_{p,q} - \sin\theta m_{q,q} \\ = \cos\theta[\sin\theta a_{p,p} + \cos\theta a_{p,q}] - \sin\theta[\sin\theta[\sin\theta a_{q,p} + \cos\theta a_{a,q}] \\ = \cos(2\theta) a_{p,q} + \sin(2\theta)\frac{a_{p,p} - a_{q,a}}{2} \\ b_{p,p} = \cos\theta m_{p,p} - \sin\theta m_{q,p} \\ = a_{p,p}\cos^2\theta + a_{q,q}\sin^2\theta - a_{p,q}\sin(2\theta) \\ b_{q,q} = \sin\theta m_{p,p} + \cos\theta m_{q,p} \\ = a_{p,p}\sin^2\theta + a_{q,q}\cos^2\theta + a_{p,q}\sin(2\theta) \end{cases}$$

(III.B.3) Relier deux matrices et déduction :

On a donc $\begin{bmatrix} b_{p,p} & b_{p,q} \\ b_{q,p} & b_{q,q} \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{p,p} & a_{p,q} \\ a_{q,p} & a_{q,q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ et l'égalité demandée découle de (II.B).

(III.B.4) Existence et unicité de $\theta_{\mathbf{p,q}}$: Le calcul fait au (II.C) donne

$$\boxed{\theta_{\mathbf{p,q}} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \textbf{si } \mathbf{a_{p,p} = a_{q,q}} \\ -\frac{1}{2}\textbf{Arctan}\left[\frac{2\mathbf{a_{p,q}}}{\mathbf{a_{p,p} - a_{q,q}}}\right] & \textbf{si } \mathbf{a_{p,p} \neq a_{q,q}} \end{cases}}$$

Partie IV - Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie

(IV.A.1) $\mathbf{x_k}$ appartient à une union de boules : Raisonnons par l'absurde, supposons la proposition fausse :

$non\big[\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N} k \geq n_\varepsilon \Longrightarrow x_k \in \bigcup_{\mu=1}^{M} B[a_\mu, \varepsilon]\big] \Longleftrightarrow \exists\varepsilon_0 > 0,\ foralln \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N} k \geq n\ et\ x_k \notin \bigcup_{\mu=1}^{M} B[a_\mu, \varepsilon_0]$.

Posons $V_0 = \bigcup_{\mu=1}^{M} B[a_\mu, \varepsilon_0]$ et construisons par récurrence une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x_{\varphi(p)} \notin V_0$:

ˆ Pour $p = 0$ $\exists k \geq 0$ $x_k \notin V_0$ notons $\varphi(0)$ un de ces k.

˙ Si on a construit $\varphi(0) < \varphi(1) < ...\varphi(p-1)$ avec $x_{\varphi(i)} \notin V_0$ pour $i \leq p-1$, par hyptohèse, $\exists k \geq \varphi(p-1)+1$ et $x_k \notin V_0$: notons $\varphi(p)$ un tel k ; on a $\varphi(p) > \varphi(p-1)$ et $x_{\varphi(p)} \notin V_0$: d'où l'existece de φ par récurrence.

Maintenant, $(x_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée (car sous suite d'une suite bornée) d'un espace vectoriel de dimension FINIE, donc fermé, elle admet donc une valeur d'adhérence ℓ *(La boule fermée qui contient cette suite bornée, est un fermé borné dans un espace normé de dimension finie, donc compact, et Bolzano Weiestrass donne l'existence de cette valeur d'adhérence)*, donc il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(\psi(q))}$ tende vers ℓ quand q tend vers plus l'infini.

Mais $\varphi \circ \psi$ est strictement croissante donc ℓ est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc il existe $\mu_0 \in [[1, M]]$ tel que $\ell = a_{\mu_0}$.

Mais V_0 appartient à l'ensemble des voisinages de a_{μ_0} et $\forall q \in \mathbb{N}$ $x_{\varphi(\psi(q))} \notin V_0$ ce qui est absurde.

Donc $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}\ k \geq n_\varepsilon \Longrightarrow x_k \in \bigcup_{\mu=1}^{M} B[a_\mu, \varepsilon]$.

(IV.A.2) Choix "judicieux" de ε :

- Prenons $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}Min\{||a_\mu - a_{\mu'}||/\mu \neq \mu'\}$ et appliquons (IV.A.1) : $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}\ k \geq n_\varepsilon \Longrightarrow x_k \in \bigcup_{\mu=1}^{M} B[a_\mu, \varepsilon]$ (1).

D'autre part, puisque $\lim_{n\to+\infty} ||x_{n+1} - x_n|| = 0$, $\exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq n'_\varepsilon \Longrightarrow ||x_{k+1} - x_k|| \leq \varepsilon$ (2).

Soit $n_0 = Max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon)$, on a, d'après (1), $x_{n_0} \in \bigcup_{\mu=1}^{M} B[a_\mu, \varepsilon]$, donc il existe $\mu_0 \in [[1, M]]$ tel que $x_{n_0} \in B[a_{\mu_0}, \varepsilon]$.

Montrons par récurrence sur k, que $k \geq n_0 \Longrightarrow x_k \in B[a_{\mu_0}, \varepsilon]$:
* Pour $k = n_0$ c'est vrai.

\+ Si le résultat est vrai pour k, on a $x_k \in B[a_{\mu_0}, \varepsilon]$ et $x_{k+1} \in \bigcup_{\mu=1}^{M} B[a_\mu, \varepsilon]$ donc il existe μ_1 tel que $x_{k+1} \in B[a_{\mu_1}, \varepsilon]$ et si $\mu_1 \neq \mu_0$, on a : $4\varepsilon \leq ||a_{\mu_1} - a_{\mu_0}|| \leq_{\text{inégalité triangulaire}} ||a_{\mu_1} - x_{k+1}|| + ||x_{k+1} - a_{\mu_0}|| \leq 3\varepsilon$, ce qui est absurde. Donc $\mu_1 = \mu_0$ et $x_{k+1} \in B[a_{\mu_0}, \varepsilon]$.

Par conséquent $\forall k \geq n_0 \Longrightarrow x_k \in B[a_{\mu_0}, \varepsilon]$.

• Soit $\alpha > 0$ quelconque, prenons $\varepsilon = Min[\alpha, \frac{1}{4}Min\{||a_\mu - a_{\mu'}||/\mu \neq \mu'\}]$, alors d'après le raisonnement ci dessus $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \exists \mu_0 \in [[1, M]]\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0 \Longrightarrow x_k \in B[a_{\mu_0}, \varepsilon]$. Or $B[a_{\mu_0}, \varepsilon] \subseteq B[a_{\mu_0}, \alpha]$, donc $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ k \geq n_0 \Longrightarrow x_k \in B[a_{\mu_0}, \alpha]$ c'est à dire $x_k \rightarrow_{k\to+\infty} a_{\mu_0}$.

Partie V - Méthode de Jacobi : une suite de matrices convergeant vers une diagonalisée de A

(Il y a une erreur d'énoncé : il manque une valeur absolue entourant le premier membre de l'égalité de la condition (1) du préambule de cette partie (V))

(V.A) Conséquence du choix de θ_k : D'après (III.B.4) on a $\boxed{\mathbf{a_{p,q}^{(k+1)} = a_{q,p}^{(k+1)} = 0}}$.

(V.B.1) Majorer ε_k : $\varepsilon_k = \sum_{i\neq j} [a_{i,j}^{(k)}]^2 \leq [a_{p,q}^{(k)}]^2 \sum_{i\neq j} 1 = n(n-1)[a_{p,q}^{(k)}]^2$.

(V.B.2) Relation entre deux ε_k successifs :

$\varepsilon_{k+1} = \sum_{i\neq j} [a_{i,j}^{(k+1)}]^2 = ||A_{k+1}||^2 - \sum_{i=1}^{n} [a_{i,i}^{(k+1)}]^2 =_{\text{d'après (I.D)}} ||A_k||^2 - \sum_{i=1}^{n} [a_{i,i}^{(k+1)}]^2$

$=_{\text{“j'ai rien changé” car } [a_{p,q}^{(k+1)}]^2 = 0} ||A_k||^2 - \sum_{\substack{i \neq p \\ i \neq q}} [a_{i,i}^{(k+1)}]^2 - \left([a_{p,p}^{(k+1)}]^2 + [a_{q,q}^{(k+1)}]^2 + 2[a_{p,q}^{(k+1)}]^2\right) =_{\text{D'après (III.B.3)}} ||A_k||^2 - \sum_{\substack{i \neq p \\ i \neq q}} [a_{i,i}^{(k)}]^2 - \left([a_{p,p}^{(k)}]^2 + [a_{q,q}^{(k)}]^2 + 2[a_{p,q}^{(k)}]^2\right) = \varepsilon_k - 2[a_{p,q}^{(k)}]^2$.

(V.B.3) Déduction :

D'après (V.B.1), $[a_{p,q}^{(k)}]^2 \geq \frac{1}{n(n-1)}\varepsilon_k$, puisque $n(n-1) > 0$ si $n \geq 2$.

D'où $\varepsilon_{k+1} \leq \varepsilon_k - \frac{2}{n(n-1)}\varepsilon_k$. Comme $1 - \frac{2}{n(n-1)} \geq 0$, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq \varepsilon_k \leq [1 - \frac{2}{n(n-1)}]^k \varepsilon_0$ et $0 \leq 1 - \frac{2}{n(n-1)} < 1$ donc $\lim \varepsilon_k = 0$ et donc $\boxed{\lim \mathbf{B_k} = \mathbf{0}}$.

(V.C.1) $\boldsymbol{\Delta}$ est diagonale : L'ensemble $\mathcal{D}_n$ des matrices diagonales est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc un fermé *(prendre la base finie des matrices diagonales formée par les matrices de base $E_{i,i} = Diag(0, ..., 1, 0, ..., 0)$, et dans D_n, toute adhérente à une matrice diagonale est diagonale puisqu'elle s'écrit $x_1(p)E_{1,1} + ...$)* et $\forall \ell,\ \ D_{k_\ell} \in \mathcal{D}_n$ avec $\Delta = \lim_{\ell\to+\infty} D_{k_\ell}$ donc $\Delta \in \mathcal{D}_n$.

(V.C.2) A et $\boldsymbol{\Delta}$ ont le même polynôme caractéristique : L'application $\chi : M_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}_n[X]$ qui à M associe PC_M (polynôme caractéristique de M) est continue car $PC_M = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma [X\delta_{1,\sigma(1)} - a_{1,\sigma(1)}]...[X\delta_{n,\sigma(n)} - a_{n,\sigma(n)}]$; donc χ est une somme finie de produits de fonctions continues (le produit de polynômes est bilinéaire donc continu sur $\mathbb{R}_n[X]$).

Or $PC(A_{k+1}) = PC(A_k)$ car A_{k+1} et A_k sont semblables, donc pour tout k $PC(A_k) = PC(A)$ et $A_{k_\ell} = D_{k_\ell} + B_{k_\ell} \rightarrow_{k\to+\infty} \Delta + 0$ donc $PC(A_{k_\ell}) \to PC(\Delta)$ et donc $PC(A) = PC(\Delta)$.

(V.C.3) Conclusion : Comme $PC(\Delta) = \prod_{i=1}^{n}(X - \Delta_{i,i})$ on a $(\Delta_{1,1}, ..., \Delta_{n,n}) = (\lambda_{\sigma(1)}, ..., \lambda_{\sigma(n)})$ pour une certaine permutation σ, par unicité de la décomposition de $PC(\Delta)$ en produit de facteurs irréductibles à l'ordre près.

Donc l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est inclus dans l'ensemble fini $\{Diag(\lambda_{\sigma(1)},...,\lambda_{\sigma(n)}/\sigma \in \mathfrak{S}_n\}$.

(V.D.1) La suite $(\mathbf{D_k})$ est bornée :

- $||D_k||^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}[a^{(k)}_{i,i}]^2 \leq ||A_k||^2 = ||A||^2$ car $A_{k+1}|| = ||A_k||$, donc la suite $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. (Dans la boule de centre 0 et de rayon $||A||$)

- **Limite de $\mathbf{D_{k+1}-D_k}$:**

$||D_{k+1}-D_k||^2 = [a^{(k+1)}_{p,p} - a^{(k)}_{p,p}]^2 + [a^{(k+1)}_{q,q} - a^{(k)}_{q,q}]^2$

$\boxed{\textbf{1er cas}}$ $\boxed{a^{(k)}_{p,p} = a^{(k)}_{q,q} \text{ et } a^{(k)}_{p,q} \neq 0}$ alors $\theta_k = \frac{\pi}{4}$ et $\begin{cases} a^{(k+1)}_{p,p} = a^{(k)}_{p,p} - a^{(k)}_{p,q} \\ a^{(k+1)}_{q,q} = a^{(k)}_{p,p} + a^{(k)}_{p,q} \end{cases}$ donc $||D_{k+1}-D_k||^2 = 2[a^{(k)}_{p,q}]^2$

$\boxed{\textbf{2ème cas}}$ $\boxed{a^{(k)}_{p,p} \neq a^{(k)}_{q,q} \text{ et } a^{(k)}_{p,q} \neq 0}$

Alors $\cos(2\theta_k) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(2\theta_k)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4[a^{(k)}_{p,q}]^2}{[a^{(k)}_{p,p}-a^{(k)}_{q,q}]^2}}}$ et $\sin(2\theta_k) = \cos(2\theta_k)\tan(2\theta_k) = -\frac{2[a^{(k)}_{p,q}]}{[a^{(k)}_{p,p}-a^{(k)}_{q,q}]}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4[a^{(k)}_{p,q}]^2}{[a^{(k)}_{p,p}-a^{(k)}_{q,q}]^2}}}$.

Par conséquent $a^{(k+1)}_{p,p} = \frac{a^{(k)}_{p,p}+a^{(k)}_{q,q}}{2} + \frac{a^{(k)}_{p,p}-a^{(k)}_{q,q}}{2}\cos(2\theta_k) - a^{(k)}_{p,q}\sin(2\theta_k)$
$= \frac{a^{(k)}_{p,p}+a^{(k)}_{q,q}}{2} + \frac{a^{(k)}_{p,p}-a^{(k)}_{q,q}}{2}\sqrt{1+\frac{4[a^{(k)}_{p,q}]^2}{[a^{(k)}_{p,p}-a^{(k)}_{q,q}]^2}}$

Et de même $a^{(k+1)}_{q,q} = \frac{a^{(k)}_{p,p}+a^{(k)}_{q,q}}{2} - \frac{a^{(k)}_{p,p}-a^{(k)}_{q,q}}{2}\sqrt{1+\frac{4[a^{(k)}_{p,q}]^2}{[a^{(k)}_{p,p}-a^{(k)}_{q,q}]^2}}$

D'où $||D_{k+1}-D_k||^2 = 2\big[fraca^{(k)}_{p,p} - a^{(k)}_{q,q}2\big]^2 \times \left[\sqrt{1+\frac{4[a^{(k)}_{p,q}]^2}{[a^{(k)}_{p,p}-a^{(k)}_{q,q}]^2}} - 1\right]^2$

Or $\sqrt{1+x^2} \leq 1+|x|$ car $1+x^2 \leq 1+x^2+2|x|$, par suite $||D_{k+1}-D_k||^2 \leq 2\big[\frac{a^{(k)}_{p,p}-a^{(k)}_{q,q}}{2}\big]^2 \times \left[1+\frac{4[a^{(k)}_{p,q}]^2}{[a^{(k)}_{p,p}-a^{(k)}_{q,q}]^2} - 1\right]^2 = 2[a^{(k)}_{p,q}]^2$.

$\boxed{\textbf{3ème cas}}$ $\boxed{a^{(k)}_{p,q} = 0}$ alors $D_{k+1} = D_k$ donc $||D_{k+1}-D_k|| = 0$.

Dans les trois cas on a $||D_{k+1}-D_k|| \leq \sqrt{2}|a^{(k)}_{p,q}| \leq \sqrt{2}\varepsilon_k$ donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}||D_{k+1}-D_k|| = 0$.

(V.D.2) Convergence des suites : D'après ces deux résultats, on peut appliquer (IV.A) à la suite (D_k) qui converge donc vers une matrice diagonale Δ. Comme $A_k = D_k + B_k$ avec $B_k \to 0$ on a $A_k \to \Delta$.

En particulier $a^{(k)}_{i,i} \to \Delta_{i,i} \in Sp(A)$, ce qui permet d'obtenir des valeurs approchées des valeurs propres de A, par les termes diagonaux de A_k.

Partie VI - Étude d'un exemple pour n=3

(VI.A) Déterminer θ_0 et $\mathbf{A_1}$: On a $(p_0,q_0) = (2,3)$ et donc $\boxed{\theta_0 = -\frac{1}{2}Arctan(\frac{24}{7})}$

Pour cette valeur, on a vu en (II.E) que $\begin{pmatrix}\sin\theta_0\\ \cos\theta_0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}\begin{pmatrix}-3\\ 4\end{pmatrix}$, donc $\tan\theta_0 = -\frac{3}{4}$, $\cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{4}{5}$ et $\sin\theta_0 = -\frac{3}{4}\times\frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$: donc $\Omega_0 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$ et en utilisant la formule (III.B.2) $\boxed{\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix}15 & 5 & 0\\ 5 & 15 & 0\\ 0 & 0 & -10\end{bmatrix}}$

(VI.B) Déterminer θ_1 et $\mathbf{A_2}$:

Cette fois $(p_1,q_1) = (1,2)$ et $\boxed{\boldsymbol{\theta_1 = \frac{\pi}{4}}}$ donc $\Omega_1 = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ et $\boxed{\mathbf{A_2} = \begin{bmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 20 & 0\\ 0 & 0 & -10\end{bmatrix}}$

(VI.C) Polynôme caractéristique de A :

Puisque A_2 est diagonale, la méthode de JACOBI nous donne $\boxed{\mathbf{PC(A) = PC(A_2) = (X-10)(X-20)(X=10)}}$ et $\boxed{\mathbf{Sp(A) = \{10, 20, -10\}}}$.

Il est difficile ce comprendre ce qu'attend le correcteur comme commentaire ! On peut observer que A a été choisie pour avoir A_2 diagonale (ce qui n'est pas le cas général !!), que dans ce cas le calcul apparaît plus simple que par le calcul de $PC(A)$ et résolution de l'équation caractéristique.

On peut aussi remarquer qu'on a facilement une base orthonormée de vecteurs propres en calculant la matrice $\Omega_0\Omega_1$.

CENTRALE 2 MP 2000