

C.C.P. 2006, filière PC, première épreuve

• Partie I

1. La base $\mathcal{B}$ étant orthonormale, on sait par le cours que $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i$, où $n = \dim E$ et où les x_i et les y_i sont les coordonnées de x et y dans $\mathcal{B}$. Sous forme matricielle, cela s'écrit $(x | y) = {}^tXY = {}^tYX$.

2. a) D'après le cours, $p(z) = \sum_{i=1}^k (e_i | z) e_i$.

b) i) Sous forme matricielle, l'égalité du a) devient $M(p)Z = \sum_{i=1}^k {}^tE_i Z E_i$, mais ${}^tE_i Z$ peut-être vu aussi bien comme un scalaire que comme une matrice de taille $(1,1)$, ce qui permet d'écrire ${}^tE_i Z E_i = E_i {}^tE_i Z$, d'où le résultat.

ii) Étant valable pour tout Z , l'égalité précédente signifie précisément que $M(p) = \sum_{i=1}^k E_i {}^tE_i$.

c) Par définition de p , les vecteurs $p(z)$ et $z - p(z)$ sont orthogonaux, donc $\|z\|^2 = \|p(z)\|^2 + \|z - p(z)\|^2 \geq \|p(z)\|^2$.

3. a) Posons $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)$.

Soient E_1 et E_2 les matrices de e_1 et e_2 dans la base canonique.

Les vecteurs e_1 et e_2 sont unitaires et orthogonaux et on vérifie immédiatement que $M = E_1 {}^tE_1 + E_2 {}^tE_2$.

On en déduit d'après 2., que M est la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal π sur $\text{Vect}(e_1, e_2)$.

b) On sait déjà que (e_1, e_2) est une base orthonormale de $\text{Im } \pi$. Posons $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)$ et $e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1)$.

Il est immédiat que (e_3, e_4) est une base orthonormale de $(\text{Im } \pi)^\perp$, c'est-à-dire de $\text{Ker } \pi$.

4. a) $u = \frac{1}{\lambda} p(r(u)) \in \text{Im } p = H$, d'où $p(r(u) - \lambda u) = (p \circ r)(u) - \lambda p(u) = \lambda u - \lambda u = 0$, donc $r(u) - \lambda u \in H^\perp$.

b) Selon a), $0 = (u | r(u) - \lambda u) = (u | r(u)) - \lambda \|u\|^2$.

Mais $r(u) \in K$ et $u - r(u) \in K^\perp$, donc $(u | r(u)) = (r(u) | r(u)) = \|r(u)\|^2$, donc $\|r(u)\|^2 = \lambda \|u\|^2$.

c) Compte tenu du 2.c), le b) montre que les valeurs propres non nulles de $p \circ r$ sont dans $]0, 1]$, d'où le résultat.

5. a) D'une part, $(p \circ r)^2 = p \circ r \circ p \circ r = p \circ p \circ r \circ r = p \circ r$; d'autre part, p et r étant symétriques, pour $(x, y) \in F^2$:

$$((p \circ r)(x) | y) = (r(x) | p(y)) = (x | (r \circ p)(y)) = (x | (p \circ r)(y)).$$

Ainsi, $p \circ r$ est un projecteur symétrique, c'est-à-dire un projecteur orthogonal.

b) Évidemment $\text{Sp}(p \circ r) = \{0, 1\}$ puisque $p \circ r$ est un projecteur non nul distinct de Id_F ($\text{Im}(p \circ r) \subset \text{Im } p = H$).

c) - $\text{Ker}(p \circ r) = \text{Ker}(r \circ p)$ contient évidemment $\text{Ker } p$ et $\text{Ker } r$, donc contient aussi $\text{Ker } p + \text{Ker } r$.

Si $u \in \text{Ker}(p \circ r)$, alors $r(u) \in \text{Ker } p$ et $u - r(u) \in \text{Ker } r$, donc $u \in \text{Ker } p + \text{Ker } r$.

- $\text{Im}(p \circ r) = \text{Im}(r \circ p)$ est évidemment inclus dans $\text{Im } p$ et dans $\text{Im}(r)$, donc aussi dans $\text{Im } p \cap \text{Im } r$.

Si $u \in \text{Im } p \cap \text{Im } r$, alors $u = p(u) = p(r(u))$, donc $u \in \text{Im}(p \circ r)$.

6. a) Un calcul par blocs donne $R^2 = \begin{pmatrix} A^2 + BC & AB + BD \\ CA + DC & CB + D^2 \end{pmatrix}$ et ${}^tR = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix}$.

Mais $R^2 = R$ car r est un projecteur et ${}^tR = R$ car r est autoadjoint et la base considérée est orthonormale. L'identification des blocs donne alors les six égalités demandées.

b) Deux multiplications par blocs donnent $PR = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $RP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$.

i) $\implies$ ii) : A est symétrique d'après a), donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$; de plus l'expression de PR montre que le spectre de A est inclus dans le spectre réel de PR , qui est le spectre de $p \circ r$, et est donc inclus dans $\{0, 1\}$. Il en résulte que $A^2 = A$ puis, d'après les égalités du a), que $BC = {}^tCC = 0$.

ii) $\implies$ iii) : la somme des carrés des coefficients de C est la trace de tCC , qui est nulle, donc $C = 0$.

iii) $\implies$ iv) : $C = 0$ implique $B = 0$ d'après a). Le résultat est alors évident sur les expressions de PR et RP .

iv) $\implies$ i) : a été vu au 5.

• Partie II

1. $f(x)$ décrit $\text{Im } f$ quand x décrit E et on sait que le vecteur de $\text{Im } f$ le plus proche de v est le projeté orthogonal v' de v sur $\text{Im } f$; les vecteurs x_0 satisfaisant à l'égalité demandée sont donc exactement les antécédents de v' par f .
2. Avec la notation du 1., lorsque f est injective, v' n'a qu'un antécédent, d'où le résultat.
3. x_0 est pseudo-solution de $(*)$ si et seulement si $f(x_0) = v'$, ce qui équivaut à $v - f(x_0) \in (\text{Im } f)^\perp$, ou encore à : $\forall x \in E, (f(x) | f(x_0) - v) = 0$.
4. $(f(x) | f(x_0) - v) = 0$ s'écrit matriciellement ${}^t(AX)(AX_0 - V) = 0$, ou encore ${}^tX{}^tAAX_0 = {}^tX{}^tAV$.
Cette égalité est vérifiée pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (où $n = \dim E$) si et seulement si ${}^tAAX_0 = {}^tAV$.
5. On calcule ${}^tAA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et ${}^tAV = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La résolution du système ${}^tAAX = {}^tAV$ donne les pseudo-solutions cherchées : $x = (a, 1/2, a)$, a réel quelconque.

6. a) $\sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2 = \|\lambda a + \mu b - c\|^2 = \|f(\lambda, \mu) - c\|^2$, où $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ est définie par $f(\lambda, \mu) = \lambda a + \mu b$.
Le problème posé équivaut donc à la recherche des pseudo-solutions de l'équation $(*) : f(x) = c$.

La matrice A de f dans les bases canoniques est $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$.

b) f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0\}$, c'est-à-dire si et seulement si (a, b) est une famille libre.

c) On calcule ${}^tAA = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & (a | b) \\ (a | b) & \|b\|^2 \end{pmatrix}$ et ${}^tAV = \begin{pmatrix} (a | c) \\ (b | c) \end{pmatrix}$.

La résolution du système de Cramer $\begin{pmatrix} \|a\|^2 & (a | b) \\ (a | b) & \|b\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a | c) \\ (b | c) \end{pmatrix}$ conduit à la solution :

$$\lambda = \frac{\|b\|^2 (a | c) - (a | b)(b | c)}{\|a\|^2 \|b\|^2 - (a | b)^2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\|a\|^2 (b | c) - (a | b)(a | c)}{\|a\|^2 \|b\|^2 - (a | b)^2}.$$

Remarque : (a, b) étant supposée libre, on savait à l'avance par 2. et 6.b) que $(*)$ possédait une pseudo-solution unique ; ce fait se retrouve directement par la non-nullité du déterminant du système précédent, puisque l'inégalité de Cauchy-Schwarz est stricte pour deux vecteurs non colinéaires.

• Partie III

1. a) D'abord, on peut écrire d'une manière unique $y = z + y'$, avec $z \in \text{Im } f$ et $y' \in (\text{Im } f)^\perp$.
Ensuite, $(\text{Ker } f)^\perp$ étant un supplémentaire de $\text{Ker } f$, on sait que f induit un isomorphisme de $(\text{Ker } f)^\perp$ sur $\text{Im } f$ et il existe par conséquent un unique $x \in (\text{Ker } f)^\perp$ tel que $z = f(x)$.
- b) L'unicité du couple (x, y') a été démontrée au a) en même temps que son existence.
- c) Soient $(y_1, y_2) \in F^2$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Par définition de g , $y_1 = f(g(y_1)) + y'_1$ et $y_2 = f(g(y_2)) + y'_2$, avec $g(y_1)$ et $g(y_2)$ dans $(\text{Ker } f)^\perp$, y'_1 et y'_2 dans $(\text{Im } f)^\perp$.
On en déduit $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = f(\alpha_1 g(y_1) + \alpha_2 g(y_2)) + (\alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2)$. Comme $\alpha_1 g(y_1) + \alpha_2 g(y_2) \in (\text{Ker } f)^\perp$ et $\alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 \in (\text{Im } f)^\perp$, cette égalité montre que $g(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 g(y_1) + \alpha_2 g(y_2)$; g est bien linéaire.
2. - $0_E \in (\text{Ker } f)^\perp$ donc $g(y) = 0_E$ si et seulement si y peut s'écrire $f(0_E) + y'$ avec $y' \in (\text{Im } f)^\perp$, ce qui équivaut à $y \in (\text{Im } f)^\perp$. Ainsi, $\text{Ker } g = (\text{Im } f)^\perp$.
- Par définition de g , $\text{Im } g \subset (\text{Ker } f)^\perp$. Inversement, si $x \in (\text{Ker } f)^\perp$, la décomposition triviale $f(x) = f(x) + 0_F$, où $0_F \in (\text{Im } f)^\perp$, montre que $g(f(x)) = x$, donc que $x \in \text{Im } g$. Ainsi, $\text{Im } g = (\text{Ker } f)^\perp$.
3. a) On a déjà remarqué au 2. que si $x \in (\text{Ker } f)^\perp$, alors $(g \circ f)(x) = x$; d'autre part, si $x \in \text{Ker } f$, alors $(g \circ f)(x) = 0$ de façon évidente. On en déduit que $g \circ f$ est le projecteur orthogonal de E sur $(\text{Ker } f)^\perp$ puisque ces deux endomorphismes de E coïncident sur deux sous-e.v. supplémentaires.
- b) On raisonne comme au a). Si $y \in \text{Im } f$, alors $y' = 0$ (notation du 1.), donc $y = f(g(y)) + 0 = (f \circ g)(y)$.
Si $y \in (\text{Im } f)^\perp$, $g(y) = 0$ d'après 2., donc $(f \circ g)(y) = 0$. $f \circ g$ est donc le projecteur orthogonal sur $\text{Im } f$.

4. Ici, f est surjective et $\text{Ker } f = \text{Vect}((1, -1, 1))$, donc $(\text{Ker } f)^\perp$ est le plan vectoriel d'équation $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.
 Selon la définition de g , étant donné $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on recherche $x = (x_1, x_2, x_3) \in (\text{Ker } f)^\perp$ tel que $f(x) = y$.

Cela conduit au système
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = y_1 \\ x_2 + x_3 = y_2 \end{cases} \text{ puis à } x_1 = \frac{2y_1 - y_2}{3}, x_2 = \frac{y_1 + y_2}{3}, x_3 = \frac{-y_1 + 2y_2}{3}.$$

La matrice de g dans les bases canoniques est donc $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. a) - $x \in \text{Ker } f \iff \forall y \in E, (f(x) | y) = 0 \iff \forall y \in E, (x | f(y)) = 0 \iff x \in (\text{Im } f)^\perp$, donc $\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$.
 - Ensuite, $\text{Im } f = ((\text{Im } f)^\perp)^\perp = (\text{Ker } f)^\perp$.

b) Soit (λ, x) un couple propre de f . Distinguons deux cas :

- si $\lambda = 0$, alors $x \in \text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp = \text{Ker } g$, donc $g(x) = 0$.

- si $\lambda \neq 0$, alors $x = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \text{Im } f = (\text{Ker } f)^\perp$, donc $g(x) = \frac{x}{\lambda}$ par définition de g .

Dans les deux cas, x est bien vecteur propre de g .

- c) Par le théorème spectral, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f ; d'après b), ceux-ci sont aussi des vecteurs propres de g . Ainsi, g est orthodiagonalisable, donc g est symétrique.

6. D'après la question précédente, toute base propre de f est aussi une base propre de g , avec conservation de la valeur propre 0 et remplacement des valeurs propres non nulles par leur inverse.

On trouve $\chi_A = X^3 - 9X^2 + 18X = X(X - 3)(X - 6)$. Le calcul des vecteurs propres conduit ensuite à :

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} {}^tP, \text{ avec } P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \text{O}_3(\mathbb{R}).$$

On en déduit la matrice B de g relativement aux bases canoniques :

$$B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} {}^tP = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$
