

I Préliminaires

I-1) Remarque 1 Question facile à traiter avec soin, pour T , D et S .

Il est clair que T , D et S sont de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans lui même.

Par ailleurs, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$,

$$T(\lambda f_1 + \mu f_2)(t) = t(\lambda f_1 + \mu f_2)(t) = \lambda t f_1(t) + \mu t f_2(t) = \lambda T(f_1)(t) + \mu T(f_2)(t).$$

Ceci est valable $\forall t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Et donc : } T(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda T(f_1) + \mu T(f_2).$$

T est bien linéaire, donc un endomorphisme.

Il en est de même aussi facilement pour D , à cause de la linéarité de la dérivation, et pour S .

Enfin, il est clair que $S \circ S = Id$ et que S est bijective, car $\forall h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \exists ! f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) / S(f) = h$, avec f définie par : $f(t) = h(-t)$ pour tout t .

Ce qui prouve que S est un automorphisme et que $S^{-1} = S$.

I-2) Remarque 2 Question classique à traiter avec beaucoup de soin.

- a) $t \mapsto e^{-t^2}$ est clairement continue, donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$, par ailleurs elle est paire, il n'y a qu'un seul problème de convergence à étudier en $+\infty$.

Enfin, elle est positive, et sur $[1, +\infty[$, on a : $e^{-t^2} \leq e^{-t}$, dont l'intégrale converge en $+\infty$.

J est bien une intégrale convergente, par comparaison.

Pour $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt$, on pose : $u = \sqrt{\pi} t$, qui est bien monotone de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales sont

$$\text{donc de même nature, ici convergentes, et on trouve : } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = 1.$$

- b) La continuité de la fonction f qui entraîne la locale intégrabilité est une évidence sur laquelle on ne revient pas.

Les convergences en $+\infty$ et en $-\infty$ se montrent de la même façon. On le fait en $+\infty$.

P est un polynôme.

On a donc : $\lim_{+\infty} t^2 \times P(t)e^{-\pi t^2} = 0$, ce qui donne : $|P(t)e^{-\pi t^2}| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ce qui prouve, par comparaison, la convergence absolue de l'intégrale en $+\infty$.

- c) La simple inégalité $|f(t)e^{-2i\pi ut}| \leq |f(t)|$ prouve, par comparaison et convergence absolue, la convergence demandée.

I-3) Remarque 3 L'énoncé semble ici considérer que l'ensemble d'arrivée est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Comme on vient de la voir, l'intégrale $\psi(u)$ converge, ψ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ et ϕ est ainsi définie sur $\mathcal{P}$.

Pour la linéarité : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \phi(\lambda f + \mu g)(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t) e^{-2i\pi ut} dt = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi ut} dt + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-2i\pi ut} dt \\ &= \lambda \phi(f)(u) + \mu \phi(g)(u) \end{aligned}$$

par linéarité des intégrales convergentes et définition de ϕ .

Ce qui prouve : $\phi(\lambda f + \mu g) = \lambda \phi(f) + \mu \phi(g)$ et donc la linéarité de ϕ .

II Deux formules pour l'application linéaire ϕ

II-1) ψ est une fonction définie par une intégrale généralisée à paramètre.

$(t, u) \mapsto f(t)e^{-2i\pi ut}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$|f(t)e^{-2i\pi ut}| \leq |f(t)| \text{ pour tout } t \text{ et } u,$$

- avec $|f(t)|$ indépendante de u

- et $|f(t)|$ intégrable sur $] -\infty, +\infty[$.

Ce qui prouve la continuité de ψ .

On étudie maintenant la classe $\mathcal{C}^1$.

- $\frac{\partial (f(t)e^{-2i\pi ut})}{\partial u} = -2i\pi t f(t) e^{-2i\pi ut}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $|-2i\pi t f(t) e^{-2i\pi ut}| \leq 2\pi |t f(t)|$ qui est intégrable sur $] -\infty, +\infty[$ car c'est le module d'un élément de $\mathcal{P}$, et qui, par ailleurs, ne dépend pas de u .

ψ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a : $\psi'(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi t f(t) e^{-2i\pi ut} dt = -2i\pi \phi(g)(u)$

Ce qui prouve bien : $\psi' = -2i\pi \phi(g)$.

Enfin, on a $-2i\pi g \in \mathcal{P}$ et on peut donc recommencer avec cette fonction ce qu'on a fait avec f , indéfiniment par une récurrence facile que l'énoncé semble nous demander d'admettre.

ψ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Enfin, en langage d'opérateurs, on note : $D \circ \phi = -2i\pi \phi \circ T$.

II- 2) $\psi_1 = \phi(f')(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-2i\pi ut} dt$

On va faire une intégration par parties dans les intégrales généralisée, en posant : $U(t) = f(t)$ et $V(t) = e^{-2i\pi ut}$ qui sont bien toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$.

Par ailleurs, l'intégrale de départ converge et : $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) e^{-2i\pi ut} = 0$, des limites finies, ce qui prouve que les deux intégrales sont de même nature, donc convergentes, et, par ailleurs, que le crochet est nul, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \psi_1(u) &= \phi(f')(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-2i\pi ut} dt = \left[f(t) e^{-2i\pi ut} \right]_{\lim_{t \rightarrow -\infty}}^{\lim_{t \rightarrow +\infty}} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (-2i\pi u) e^{-2i\pi ut} dt \\ &= 2i\pi u \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi ut} dt = 2i\pi u \psi(u) \end{aligned}$$

De nouveau, en langage d'opérateurs, on note : $\phi \circ D = 2i\pi T \circ \phi$.

III ϕ est un endomorphisme

Remarque 4 On semble changer d'espace d'arrivée pour ϕ , l'énoncé est, pour le moins, imprécis.

III- 1) On sait que $(1, t, t^2, \dots, t^n)$ constitue la base canonique de $\mathbb{R}_n[t]$, et donc, une famille libre et génératrice.

La famille $(b_0, b_1, b_2, \dots, b_n)$ constitue donc

- une famille libre de $\mathcal{P}_n$, car les exponentielles ne s'annulent jamais, et la démonstration est la même que pour la base canonique de $\mathbb{R}_n[t]$;
- une famille génératrice de $\mathcal{P}_n$, car il suffit d'engendrer le polynôme en facteur $e^{-\pi t^2}$, comme dans $\mathbb{R}_n[t]$.

III- 2) (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre. L'ensemble des solutions sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, et donc aussi sur $\mathbb{R}$, est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par :

$$t \mapsto f_1(t) = e^{-\int 2\pi t dt} = e^{-\pi t^2}.$$

$$\text{Finalement : } \mathcal{SG} = \text{Vect} \left(t \mapsto e^{-\pi t^2} \right) = \text{Vect} (b_0)$$

Remarque 5 Pour toutes les questions suivantes, il est mieux d'utiliser le langage des opérateurs et d'oublier la définition de ϕ . Ce qui est plus proche d'un esprit de programme MP que de programme TSI...

III- 3) b_0 est donc bien un élément de $\mathcal{SG}$, ce qui donne : $D(b_0) + 2\pi T(b_0) = 0$ avec : $B_0 = \phi(b_0)$.

Comme $\phi(0) = 0$, et que ϕ est linéaire, on obtient : $\phi \circ D(b_0) + 2\pi \phi \circ T(b_0) = 0$.

En utilisant les propriétés montrées auparavant : $2i\pi T \circ \phi(b_0) + iD \circ \phi(b_0) = 0$.

Et enfin : $2\pi T(B_0) + D(B_0) = 0$.

Ce qui signifie tout simplement que B_0 vérifie l'équation différentielle (E) !...

D'où : $B_0(u) = \lambda e^{-\pi u^2}$, mais, par ailleurs, $B_0(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} b_0(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1 = \lambda$

La conclusion définitive de cette question est : $B_0 = b_0$.

III- 4) Remarquons d'abord que : $D(b_k) = k b_{k-1} - 2\pi b_{k+1}$, pour $k \geq 1$, et que : $D(b_0) = 0 - 2\pi b_1$

$$B_1 = \phi(b_1) = \phi \circ T(b_0) = \frac{i}{2\pi} D \circ \phi(b_0) = \frac{i}{2\pi} D(b_0) = -i b_1.$$

Donc : $B_1 = -i b_1$.

$$B_2 = \phi(b_2) = \phi \circ T(b_1) = \frac{i}{2\pi} D \circ \phi(b_1) = \frac{i}{2\pi} D(B_1) = \frac{i}{2\pi} D(-i b_1) = -\frac{i^2}{2\pi} D(b_1).$$

$$\text{Ce qui donne : } B_2 = -\frac{i^2}{2\pi} (b_0 - 2\pi b_2) = \frac{1}{2\pi} (b_0 - 2\pi b_2).$$

$$\text{Finalement : } B_2 = \frac{1}{2\pi} b_0 - b_2.$$

$$B_3 = \phi(b_3) = \phi \circ T(b_2) = \frac{i}{2\pi} D \circ \phi(b_2) = \frac{i}{2\pi} D(B_2) = \frac{i}{2\pi} D\left(\frac{1}{2\pi} (b_0 - 2\pi b_2)\right)$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^2} D(b_0 - 2\pi b_2) = \frac{i}{(2\pi)^2} (-2\pi b_1 - 2\pi (2b_1 - 2\pi b_3)).$$

$$\text{Finalement : } B_3 = \frac{-3}{2\pi} i b_1 + i b_3.$$

On montre maintenant par récurrence que : $B_k \in \mathcal{P}_k$. L'amorce est claire, on l'a faite sur 4 rangs !

On l'admet au rang k , on le montre au rang $k+1$.

$$B_{k+1} = \phi(b_{k+1}) = \phi \circ T(b_k) = \frac{i}{2\pi} D \circ \phi(b_k) = \frac{i}{2\pi} D(B_k).$$

Mais, $B_k \in \text{Vect}(b_0, b_1, \dots, b_k)$, et donc : $D(B_k) \in \text{Vect}(b_0, b_1, \dots, b_k, b_{k+1})$, compte tenu de la linéarité de D et de la remarque initiale faite.

Ce qui prouve bien que : $B_{k+1} \in \mathcal{P}_{k+1}$.

Ceci prouve, compte tenu de la linéarité de ϕ , que : $\phi(\mathcal{P}_n) \subset \mathcal{P}_n$.

Enfin, ϕ est bien un endomorphisme de $\mathcal{P}_n$.

IV Etude en dimension 4

IV- 1) On travaille dans la base (b_0, b_1, b_2, b_3) de $\mathcal{P}_3$.

$$\text{La matrice de } \phi_3 \text{ découle directement de la partie précédente : } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2\pi} & 0 \\ 0 & -i & 0 & \frac{-3i}{2\pi} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs : $S(b_k) = (-1)^k b_k$, par un calcul élémentaire.

$$\text{La matrice de } S_3 \text{ en découle également immédiatement : } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

IV- 2) Le déterminant de ϕ_3 est facile à obtenir par sa matrice qui est triangulaire, et vaut : $1 \times -i \times -1 \times i = -1 \neq 0$.

ϕ_3 est donc bien inversible.

$$\text{Par ailleurs, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2\pi} & 0 \\ 0 & -i & 0 & \frac{-3i}{2\pi} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2\pi} & 0 \\ 0 & -i & 0 & \frac{-3i}{2\pi} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui prouve que $\phi_3 \circ \phi_3 = S_3$.

Et enfin, compte tenu de $S_3^{-1} = S_3$ et de l'inversibilité de ϕ_3 : $\phi_3^{-1} = \phi_3 \circ S_3$.

V ϕ est bijectif. Quel est son inverse?

$$\begin{aligned} \text{V- 1)} \quad \phi(b_0^{(j)}) &= \phi \circ D(b_0^{(j-1)}) = 2i\pi T \circ \phi(b_0^{(j-1)}) \\ &= 2i\pi T \circ \phi \circ D(b_0^{(j-2)}) = (2i\pi)^2 T^2 \circ \phi(b_0^{(j-2)}) = \dots = (2i\pi)^j T^j \circ \phi(b_0) \\ &= (2i\pi)^j T^j(b_0) = (2i\pi)^j b_j. \end{aligned}$$

En un mot : $\phi(b_0^{(j)}) = (2i\pi)^j b_j$, pour $j \in \mathbb{N}^*$.

Les points de suspension correspondent à une récurrence facile que l'on n'écrit pas.

L'amorce, pour $j = 1$ est facile : $\phi(b_0') = \phi \circ D(b_0) = -2\pi \phi(b_1) = (-2\pi)(-ib_1) = 2i\pi b_1$.

$$\begin{aligned} \text{V- 2)} \quad \phi(b_k) &= \phi \circ T(b_{k-1}) = \frac{i}{2\pi} D \circ \phi(b_{k-1}) \\ &= \frac{i}{2\pi} D \circ \phi \circ T(b_{k-2}) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 D^2 \circ \phi(b_{k-2}) = \dots = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k D^k \circ \phi(b_0) \\ &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k D^k(b_0) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k b_0^{(k)} \end{aligned}$$

En un mot : $\phi(b_k) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k b_0^{(k)}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Les points de suspension correspondent encore une fois par une récurrence facile à écrire.

L'amorce, pour $k = 1$ est facile : $\phi(b_1) = -i b_1 = (-i) \times \left(-\frac{1}{2\pi}\right) b_0' = \frac{i}{2\pi} b_0'$

$$\text{V- 3)} \quad \phi^2(b_k) = \phi\left(\left(\frac{i}{2\pi}\right)^k b_0^{(k)}\right) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \phi(b_0^{(k)}) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k (2i\pi)^k b_k = (-1)^k b_k = S(b_k)$$

On remarque que ceci est encore vrai pour $k = 0$, car $\phi(b_0) = b_0$ et $S(b_0) = b_0$.

On remarquera bien ici qu'on est en dimension infinie...

La famille des b_k formant une famille génératrice de $\mathcal{P}$, on a l'égalité : $\phi \circ \phi = S$.

Comme S est clairement bijective,

- elle est surjective et donc ϕ est surjective car $g \circ f$ surjective implique g surjective ;
- elle est injective et donc ϕ est injective car $g \circ f$ injective implique f injective.

ϕ est donc bijective.

En inversant $\phi \circ \phi = S$, compte tenu de $S^{-1} = S$, on obtient : $\phi^{-1} \circ \phi^{-1} = S$.

On compose à gauche d'une part, et à droite d'autre part, par ϕ .

On obtient : $\phi^{-1} = \phi \circ S = S \circ \phi$.

$$\text{V- 4)} \quad \text{La relation } S^2 = \text{Id nous donne : } \phi^4 = \text{Id et donc enfin : } \phi^{-1} = \phi^3.$$

VI Valeurs propres et vecteurs propres de ϕ_3

Remarque 6 Question classique et facile à condition d'avoir la matrice de ϕ_3 ...

VI- 1) La matrice de ϕ_3 est triangulaire, ses valeurs propres se trouvent donc sur la diagonale, on a donc $1, -i, -1, i$, toutes simples.

Il nous suffit d'un vecteur propre pour chaque valeur propre.

ϕ_3 est bien diagonalisable.

- b_0 est propre pour la valeur propre 1 ;
- b_1 est propre pour la valeur propre $-i$;

– Pour la valeur propre -1 , on résout le système :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2\pi} & 0 \\ 0 & 1-i & 0 & \frac{-3i}{2\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve bien un espace vectoriel de dimension 1 engendré par :

$$\begin{pmatrix} 1/4\pi \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$b_2 + \frac{1}{4\pi} b_0$ est propre pour la valeur propre -1 ;

– Pour la valeur propre i , on résout le système :

$$\begin{pmatrix} 1-i & 0 & \frac{1}{2\pi} & 0 \\ 0 & -2i & 0 & \frac{-3i}{2\pi} \\ 0 & 0 & -1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve bien un espace vectoriel de dimension 1 engendré par :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3/4\pi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$b_3 - \frac{3}{4\pi} b_1$ est propre pour la valeur propre i .

VI- 2) Le problème est donc de décomposer $b_0 + b_2 + b_3$ dans la base de vecteurs propres.

$$\begin{aligned} b_0 + b_2 + b_3 &= b_0 + b_2 + \left(b_3 - \frac{3}{4\pi} b_1\right) + \frac{3}{4\pi} b_1 = b_0 + \frac{3}{4\pi} b_1 + b_2 + \left(b_3 - \frac{3}{4\pi} b_1\right) \\ &= b_0 + \frac{3}{4\pi} b_1 + \left(b_2 + \frac{1}{4\pi} b_0\right) + \left(b_3 - \frac{3}{4\pi} b_1\right) - \frac{1}{4\pi} b_0 \\ &= \left(1 - \frac{1}{4\pi}\right) b_0 + \frac{3}{4\pi} b_1 + \left(b_2 + \frac{1}{4\pi} b_0\right) + \left(b_3 - \frac{3}{4\pi} b_1\right). \end{aligned}$$

Remarque 7 Sauf erreur de calcul de ma part dans ces deux dernières questions...