

DEUXIÈME ÉPREUVE
OPTION M
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Soit Π un espace affine euclidien orienté de dimension 2. Il sera appelé brièvement plan Π . La distance de deux points A et B est notée $d(A,B)$. Tout repère Oxy considéré est orthonormé et direct : $(Ox,Oy) = \frac{\pi}{2}$.

Une partie de Π désignée par la lettre E, avec ou sans indice, est un sous-ensemble de Π contenant au moins une infinité dénombrable de points. Les différentes figures géométriques considérées - segment, cercle - sont supposées posséder elles aussi cette propriété.

Soit n un entier $n \geq 2$, et une partie E du plan Π ; pour toute suite finie de points de la partie E : P_1, P_2, \dots, P_n , le réel $g_n(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est égal à la moyenne géométrique des distances mutuelles de ces points, c'est-à-dire :

$$g_n(P_1, P_2, \dots, P_n) = \left\{ \prod_{i \neq j} d(P_i, P_j) \right\}^{1/n(n-1)} = \left\{ \prod_{i < j \leq n} d(P_i, P_j) \right\}^{2/n(n-1)}.$$

Considérons maintenant l'ensemble des réels $g_n(P_1, P_2, \dots, P_n)$ définis pour toute suite de points P_1, P_2, \dots, P_n ; si cet ensemble est borné, la borne supérieure de ces réels sera désignée par $\delta_n(E)$:

$$\delta_n(E) = \sup \{ g_n(P_1, P_2, \dots, P_n) \mid P_i \in E, 1 \leq i \leq n \} ;$$

si au contraire cet ensemble de réels n'est pas borné, $\delta_n(E)$ est égal à l'infini.

Première partie Quelques propriétés générales de $\delta_n(E)$ et quelques exemples.

- 1° a. Démontrer que si E est une partie bornée du plan Π , $\delta_2(E)$ est un réel égal au diamètre de E :
 $\delta_2(E) = \sup \{ d(A,B) \mid A, B \in E \}$.

Démontrer que pour tout entier n supérieur à 2, $\delta_n(E)$ est fini et majoré par $\delta_2(E)$.

- b. Soient deux parties E_1 et E_2 du plan Π telles que E_1 soit contenu dans E_2 : $E_1 \subset E_2$; établir pour tout entier $n \geq 2$, l'inégalité : $\delta_n(E_1) \leq \delta_n(E_2)$.
- c. Démontrer que si un sous-ensemble E n'est pas borné, il existe pour tout réel ρ ($\rho > 0$) et tout entier k ($k \geq 2$) donnés, une suite finie de points P_1, P_2, \dots, P_k , tels que pour tout i différent de j , la distance de P_i à P_j est supérieure à ρ : $d(P_i, P_j) \geq \rho$. En déduire que $\delta_n(E)$ est infini lorsque le sous-ensemble E n'est pas borné.
- d. Soit une partie bornée E du plan Π ; soit \overline{E} l'adhérence de E ; comparer $\delta_n(E)$ et $\delta_n(\overline{E})$.
- 2° Soit I le segment $[A,B]$ du plan Π de longueur a ; étant donnés deux points P_1 et P_3 de I, comment choisir un point P_2 situé entre P_1 et P_3 tel que $g_3(P_1, P_2, P_3)$ soit maximum ? En déduire la valeur de $\delta_3(I)$.

- 3°) Soit C_R un cercle de centre O et de rayon R .
- a. Considérons un repère Oxy et les trois points du cercle P_1, P_2 et P_3 définis par leurs angles polaires, égaux respectivement à $0, \theta$ et φ :

$$(\text{Ox}, \text{OP}_2) = \theta, (\text{Ox}, \text{OP}_3) = \varphi \text{ avec : } 0 < \theta < \varphi < 2\pi.$$

En supposant les points P_1 et P_3 donnés, déterminer le point P_2 tel que l'expression $g_3(P_1, P_2, P_3)$ soit maximum.

En supposant maintenant le point P_1 donné, déterminer les points P_2 et P_3 pour que $g_3(P_1, P_2, P_3)$ soit maximum.

- b. En déduire la valeur de $\delta_3(C_R)$.
- c. Soit Γ un arc de cercle de rayon R et de longueur αR ($0 < \alpha < 2\pi$) ; que vaut $\delta_3(\Gamma)$?

Deuxième partie Etude de la suite des réels $\delta_n(E)$, $n=2,3,\dots$ pour une partie quelconque E et pour le cas particulier où E est un cercle.

1°) Soit E une partie bornée du plan Π .

- a. Soit une suite de $n+1$ points de E : P_1, P_2, \dots, P_{n+1} ; démontrer la relation :

$$\{ g_{n+1}(P_1, P_2, \dots, P_{n+1}) \}^{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} g_n(P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}) .$$

L'expression $g_n(P_1, P_2, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1})$ signifie que la fonction g_n a été calculée aux n points obtenus en retranchant de la suite P_1, P_2, \dots, P_{n+1} le point P_i ($1 \leq i \leq n+1$).

- b. En déduire une relation entre $\delta_{n+1}(E)$ et $\delta_n(E)$. En conclure que la suite des réels $\delta_n(E)$, $n = 2, 3, \dots$ est convergente ; soit $\Delta(E)$ sa limite.
- 2°) a. Soient $z_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ les n racines n èmes de l'unité ; démontrer la propriété :
- $$\text{pour tout entier } k, 0 \leq k \leq n-1, \quad \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n-1} (z_k - z_j) = n (z_k)^{n-1} .$$
- b. Calculer, lorsque les points P_1, P_2, \dots, P_n sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle C_R de rayon R , la valeur du réel $g_n(P_1, P_2, \dots, P_n)$.
- c. En déduire que pour un cercle C_R la limite $\Delta(E)$ de la suite des réels $\delta_n(E)$ $n \geq 2$ est différente de 0. Donner un encadrement de cette limite.

Troisième partie

L'objet de cette partie est de relier pour une partie E de Π bornée, la quantité $\Delta(E)$ à un réel $\mu(E)$ défini à l'aide de valeurs prises par des polynômes.

Considérons un repère Oxy du plan Π . A chacun des points P du plan Π est associé un nombre complexe : l'affixe de P . Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, soit \mathcal{U}_n l'ensemble des polynômes complexes unitaires U de degré n , c'est-à-dire les polynômes complexes dont le terme de plus haut degré est z^n .

A) Généralités.

- 1°) a. Soit une partie E de Π bornée. Démontrer en considérant un repère Oxy du plan Π qu'à tout polynôme unitaire U peut être associé un réel égal à la borne supérieure des modules des valeurs prises par ce polynôme U aux différents points de E :

$$S(E;U) = \sup \{ |U(z)| \mid z \text{ est l'affixe d'un point quelconque } P \text{ de } E \}.$$

Soit $\sigma_n(E)$ la borne inférieure des réels $S(E;U)$ lorsque U est un polynôme unitaire quelconque de degré n :

$$\sigma_n(E) = \inf \{ S(E;U) \mid U \in \mathcal{U}_n \}.$$

Démontrer que le réel $\sigma_n(E)$ ne dépend pas du repère Oxy choisi dans le plan Π .

Dans la suite, pour une partie E bornée, il sera posé : $\mu_n(E) = \sqrt[n]{\sigma_n(E)}$.

- b. Démontrer que si la partie E n'est pas bornée, quel que soit le repère Oxy choisi dans le plan Π , l'ensemble $\{ |U(z)| \mid z \text{ est l'affixe d'un point quelconque } P \text{ de } E \}$ n'est pas majoré.
- 2°) Déterminer deux réels a et b strictement positifs tels que pour toute partie bornée E du plan Π :

$$a \sigma_1(E) \leq \delta_2(E) \leq b \sigma_1(E).$$

B) Cas d'un segment : comportement de μ_n .

Soit I le segment fermé joignant les points A et B de coordonnées $(-1,0)$ et $(1,0)$ dans un repère Oxy du plan Π . L'intervalle fermé $[-1,1]$ sera également désigné par I . Soit n un entier, $n \geq 1$.

- 1°) Soit T_n $n=1,2,\dots$ la fonction définie sur I par la relation :

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \cdot \text{Arccos } x).$$

Établir une relation de récurrence vérifiée par ces fonctions en calculant l'expression :

$$2^{n+1}T_{n+2}(x) - 2^{n-1}T_n(x).$$

En déduire que la fonction $x \mapsto T_n(x)$ est une fonction polynomiale définie sur I ; démontrer que le polynôme T_n est unitaire ; préciser son degré n . Déterminer le maximum de $|T_n(x)|$ sur cet intervalle I .

2°) Soit U un polynôme unitaire de degré n ; le but de cette question est d'établir que le maximum de $|U(x)|$ lorsque x varie dans I est supérieur ou égal à $\frac{1}{2^{n-1}}$.

a. Supposons que le polynôme unitaire U soit réel et tel que, pour tout x de l'intervalle I :

$$|U(x)| < \frac{1}{2^{n-1}} .$$

Déterminer les signes des valeurs prises par le polynôme $U - T_n$ aux points x_k définis par la relation : $x_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$, $0 \leq k \leq n$. Démontrer que l'hypothèse formulée sur U est fausse.

b. Soit U un polynôme unitaire complexe de degré n ; démontrer que le maximum de son module sur l'intervalle I est supérieur ou égal à $\frac{1}{2^{n-1}}$.

3°) En déduire la valeur de $\mu_n(I)$. Démontrer que la suite des réels $\mu_n(I)$ admet une limite $\mu(I)$. Déterminer la valeur de $\mu(I)$.

C) Etude générale de $\mu_n(E)$.

1°) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs possédant la propriété suivante : pour tout couple d'entiers p et q appartenant à \mathbb{N}^* : $(u_{p+q})^{p+q} \leq (u_p)^p (u_q)^q$.

a. Établir la propriété : pour tous entiers k et p (appartenant à \mathbb{N}^*), $u_{kp} \leq u_p$.

b. Établir pour l'ensemble des réels u_n l'existence d'une borne inférieure ℓ et démontrer que pour tout ε donné positif il existe un entier p tel que : $u_p \leq \ell + \varepsilon$; à partir de cette remarque et du fait que, pour un entier p donné, tout entier n s'écrit de manière unique $n = pq + r$, avec $0 \leq r < p$, démontrer que la suite u_n est convergente.

2°) a. Soit E une partie bornée du plan Π ; démontrer que la suite des réels $\sigma_n(E)$ $n \geq 1$ a la propriété : pour tout couple d'entiers p et q appartenant à \mathbb{N}^* , $\sigma_{p+q}(E) \leq \sigma_p(E) \sigma_q(E)$.

b. Soit $\mu(E)$ la borne inférieure des réels $\mu_n(E)$ lorsque n varie de 1 à l'infini. Démontrer que la suite des réels $\mu_n(E)$ $n \geq 1$ est convergente et de limite $\mu(E)$. Vérifier cette propriété sur l'exemple étudié au paragraphe B ci-dessus.

- 3° a. Soient $n+1$ nombres complexes z_1, z_2, \dots, z_{n+1} et un polynôme unitaire U de degré n ; soit V la valeur du déterminant :

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (z_1)^{n-1} & (z_2)^{n-1} & \dots & (z_{n+1})^{n-1} \\ U(z_1) & U(z_2) & \dots & U(z_{n+1}) \end{vmatrix}$$

Calculer la valeur V de ce déterminant (elle est indépendante du polynôme U).

- b. Soit une partie bornée E du plan Π ; démontrer l'inégalité :

$$\{\delta_{n+1}(E)\}^{n(n+1)/2} \leq (n+1) \{\delta_n(E)\}^{n(n-1)/2} \{\mu_n(E)\}^n.$$

En choisissant pour U le polynôme particulier : $U(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i)$, démontrer la relation :

$$\{\delta_n(E)\}^{n(n-1)/2} \{\mu_n(E)\}^n \leq \{\delta_{n+1}(E)\}^{n(n+1)/2}.$$

- 4° On considère une partie quelconque E bornée du plan.

- a. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $\mu_n(E) \leq \delta_{n+1}(E)$.
- b. Donner un majorant de $\delta_{n+1}(E)$ en fonction de $\mu_1(E), \mu_2(E), \dots, \mu_n(E)$ et de n .
- c. En admettant le résultat suivant : si une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et de limite ℓ , la suite v_n définie par $v_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n^2}$ est convergente et de limite $\frac{\ell}{2}$, démontrer l'égalité : $\Delta(E) = \mu(E)$.