

Une proposition du corrigée de maths 1 du concours centrale PC – 2015

Par Mohammed Icheha ; Professeur en (PSI)

I-Première partie

I.A) Soit $F = \text{vect}(u); u \neq 0$ une droite

$\Rightarrow$ On a $u \in F$ et par hypothèse F est stable par f ; donc $f(u) \in F$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}: f(u) = \lambda u$. Ainsi u est un vecteur propre de f .

$\Leftarrow$ si u est un vecteur propre de f ; alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}: f(u) = \lambda u$. Soit $x \in \text{vect}(u), \exists \alpha \in \mathbb{K}: x = \alpha u$; donc $f(x) = f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha \lambda u \in \text{vect}(u)$; ainsi la droite $F = \text{vect}(u)$ est stable par f .

I.B.1) ■ On a $\{0\}$ et E sont des s-e-v stables par f et par hypothèse $E \neq \{0\}$; il existe donc au moins deux s-e-v stables par f .

■ Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de f ; $\chi_f = X^2 + 1$ n'a pas de racines réels ; donc f n'a pas de valeurs propres et donc n'a pas de vecteurs propres. On conclut alors par I.A) qu'il n'existe pas de droites stables par f . Il ne reste donc que les deux s-e-v $\{0\}$ et E qui sont stables par f . On conclut qu'il n'y a que deux s-e-v stables par f .

I.B.2) ■ On a $\{0\}$; $\text{Ker}(f)$ et E sont des s-e-v stables par f et comme $\begin{cases} f \neq 0 \\ f \text{ est non injective} \end{cases}$, alors $\begin{cases} \text{Ker}(f) \neq E \\ \text{Ker}(f) \neq \{0\} \end{cases}$. Ainsi, on a au moins trois s-e-v stables par f : $\{0\}$, $\text{Ker}(f)$ et E .

■ Si n est impair : On a $\{0\}$; $\text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f)$ et E sont des s-e-v stables par f et on vient de voir que les s-e-v $\{0\}$; $\text{Ker}(f)$ et E sont deux à deux distincts. On a $f \neq 0$, donc $\text{Im}(f) \neq \{0\}$, de plus $\text{Im}(f) \neq E$, car sinon f sera surjective donc injective (car on est en dimension finie) ce qui n'est pas le cas. D'autre part, puisque, par hypothèse n est impair, alors d'après le théorème du rang : $\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim E = n$, les entiers $\dim \text{Ker}(f)$ et $\dim \text{Im}(f)$ sont de parités différentes et donc $\text{Ker}(f) \neq \text{Im}(f)$. On conclut alors qu'il y a au moins quatre s-e-v stables par f ; à savoir : $\{0\}$; $\text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f)$ et E

■ Soit $\mathcal{B} = (e_1; e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \{0\}$; le s-e-v propre associé est $E_0(f) = \text{Vect}(e_1)$ qui est donc l'unique droite stable par f . Ainsi ; il n'existe que trois s-e-v stables par f qui sont : $\{0\}$; $\text{Vect}(e_1)$ et E

I.C.1) Soit $F = \text{Vect}(e_i)_{i \in I}$ où $(e_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs propres de f . On a :

$f(F) = f(\text{Vect}(e_i)_{i \in I}) = \text{Vect}(f(e_i))_{i \in I} \subset \text{Vect}(e_i)_{i \in I} = F$; Ainsi F est stable par f .

Si $F = E_{\lambda}(f)$ est le s-e-v propre associé à la valeur propre λ ; alors F est stable par f et l'endomorphisme induit par f sur F est $f_F = \lambda \text{Id}_F$.

I.C.2) Par hypothèse ; f admet un s-e propre $E_{\lambda}(f)$ de dimension supérieure ou égale à 2. Il existe donc des vecteurs $e_1; e_2$ de $E_{\lambda}(f)$ formant une famille libre.

Pour $\alpha \in \mathbb{K}$; on a $e_1 + \alpha e_2 \neq 0$; par suite $D_{\alpha} = \text{Vect}(e_1 + \alpha e_2)$ est une droite de E qui est stable par f , puisqu'il est engendré par un vecteur propre.

Pour $\alpha; \beta \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha \neq \beta$; on a $D_{\alpha} \neq D_{\beta}$. En effet ; on a :

$$D_{\alpha} = D_{\beta} \Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{K} : e_1 + \alpha e_2 = \mu(e_1 + \beta e_2) \xrightarrow{\text{par liberté de } (e_1; e_2)} (\mu = 1 \text{ et } \alpha = \mu\beta) \Rightarrow \alpha = \beta$$

Comme $\mathbb{K}$ est infini ; on conclut qu'il existe une infinité de droites stables par f .

I.C.3) Pour tout $x \in E - \{0\}$; la droite $Vect(x)$ est, selon l'hypothèse, stable par f . Il existe donc $\lambda_x \in \mathbb{K} : f(x) = \lambda_x x$.

Soit $x, y \in E - \{0\}$.

■ Si (x, y) est libre ; on a $x + y \neq 0$ et donc $f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y)$ ou encore $f(x) + f(y) = \lambda_{x+y}(x + y)$ qui n'est autre que $\lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$ qui, par liberté de (x, y) ; donne $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$

■ Si (x, y) est liée, alors $\exists \mu \in \mathbb{K} : y = \mu x$ (car $x \neq 0$) ; donc : $\lambda_y y = f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x \mu x = \lambda_x y$; ainsi $\lambda_y = \lambda_x$; ($y \neq 0$)

On conclut qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, valeur commune des λ_x tel que $\forall x \in E - \{0\} : f(x) = \lambda x$; relation qui est vraie aussi pour $x = 0$. On conclut que f est une homothétie.

I.D.1) f est par hypothèse diagonalisable ; donc E admet une base $\mathcal{B} = (e_1; \dots; e_n)$ formée de vecteurs propres de f .

Soit F un s-e-v de E .

Si $F = \{0\}$ (resp. $F = E$) ; alors $F = E$ (resp. $F = \{0\}$) est un supplémentaire de F stable par f .

Si F est non nul et distinct de E ; soit $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_p)$ une base de F . D'après le théorème de la base incomplète ; on peut trouver des vecteurs $\varepsilon_{p+1}; \dots; \varepsilon_n$ choisis parmi les vecteurs $e_1; \dots; e_n$ tels que $\mathcal{C} = (\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_p; \varepsilon_{p+1}; \dots; \varepsilon_n)$ soit une base de E . Alors $G = Vect(\varepsilon_{p+1}; \dots; \varepsilon_n)$ est un supplémentaire de F dans E qui est stable par f puisqu'il est engendré par une famille de vecteurs propres de f (cf I. C1)

I.D.2) On a f est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -e-v non nul ; donc f admet au moins une valeur propre.

Soit alors e_1 un vecteur propre associé. Puisque $Vect(e_1)$ est stable par f ; alors selon l'hypothèse ; il existe H_1 s-e-v stable par f tel que $E = Vect(e_1) \oplus H_1$.

Supposons que pour $k \in \{1; \dots; n - 1\}$; il existe k - vecteurs propres $e_1; \dots; e_k$ formant une famille libre et un s-e-v H_k stable par f tels que $E = Vect(e_1; \dots; e_k) \oplus H_k$. On a alors $\dim H_k = \dim E - \dim Vect(e_1; \dots; e_k) = n - k \geq 1$. H_k est donc un $\mathbb{C}$ -e-v non nul et qui est stable par f ; donc l'endomorphisme induit par f sur H_k admet une valeur propre et alors f admet un vecteur propre $e_{k+1} \in H_k - \{0\}$ et puisque la somme $Vect(e_1; \dots; e_k) + H_k$ est directe et que $(e_1; \dots; e_k)$ est libre, alors $(e_1; \dots; e_k; e_{k+1})$ est aussi libre. Le s-e-v $Vect(e_1; \dots; e_k; e_{k+1})$ est stable par f car il est engendré par une famille de vecteurs propres de f ; il admet donc par hypothèse un supplémentaire H_{k+1} stable par f . On a ainsi montré par récurrence que pour tout $k \in \{1; \dots; n\}$; il existe k - vecteurs propres $e_1; \dots; e_k$ formant une famille libre et un s-e-v H_k de E stable par f tels que $E = Vect(e_1; \dots; e_k) \oplus H_k$. En particulier ; il existe une famille libre $(e_1; \dots; e_n)$ formée de vecteurs propres de f telle que $E = Vect(e_1; \dots; e_n)$; (car dans ce cas $H_n = \{0\}$) ; alors $\mathcal{B} = (e_1; \dots; e_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de f . Ainsi f est diagonalisable.

■ Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; le résultat ci-dessus peut tomber en défaut : Reprenons l'exemple de la question I.B.1). Les seuls s-e-v stables par f sont $\{0\}$ et E ; chacun d'eux admet évidemment un supplémentaire stable par f ; mais f n'est pas diagonalisable puisque son polynôme caractéristique n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

II-Deuxième partie

II.A.1) Soit $x \in F$. Comme $F = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} (F \cap E_i)$; alors x s'écrit sous la forme $x = \sum_{i=1}^p x_i$ avec pour

tout $i \in \{1; \dots; n\}$, $x_i \in F \cap E_i$; on a alors : $f(x) = f(\sum_{i=1}^p x_i) = \sum_{i=1}^p f(x_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ qui est bien dans $\bigoplus_{1 \leq i \leq p} (F \cap E_i) = F$; (car $x_i \in F \cap E_i \Rightarrow \lambda_i x_i \in F \cap E_i$). Ainsi F est stable par f .

II.A.2) On a $x \in F$ et $F \subset E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_i$; alors $\exists! (x_1; \dots; x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i : x = \sum_{i=1}^p x_i$.

II.A.3) On a $\mathcal{B}_x$ est une famille génératrice de V_x et c'est une famille libre puisqu'elle est formée de vecteurs propres associées à des valeurs propres deux à deux distinctes; donc c'est une base de V_x .

II.A.4) On a $x = \sum_{i=1}^r x_i$; donc, pour $j \in \{1; \dots; r\}$: $f^{j-1}(x) = f^{j-1}(x_1) + \dots + f^{j-1}(x_r) = \lambda_1^{j-1}x_1 + \dots + \lambda_r^{j-1}x_r$ qui est bien dans $V_x = \text{vect}(x_1; \dots; x_r)$; de plus, ce calcul montre que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_x} \left((f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r} \right) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}$$

II.A.5) $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ est une famille d'éléments de V_x et le déterminant de sa matrice dans la base $\mathcal{B}_x$ est un déterminant de Vandermonde qui vaut $\prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i)$; qui est non nul, puisque les λ_i sont deux à deux distincts. Donc la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ est une base de V_x .

Autre Méthode : Montrons par une autre méthode que la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}$ est

inversible sans savoir l'expression de son déterminant.

D'abord, V est une matrice carrée. Montrons que la famille de ses colonnes forme une famille libre :

Soit $\alpha_0; \alpha_1; \dots; \alpha_{r-1} \in \mathbb{K}$ tels que : $\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i \begin{pmatrix} \lambda_1^i \\ \lambda_2^i \\ \vdots \\ \lambda_r^i \end{pmatrix} = 0$; on a donc, pour tout $k \in \{1; \dots; r\}$

$\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i \lambda_k^i = 0$; Ainsi, pour tout $k \in \{1; \dots; r\}$, λ_k est racine du polynome $P = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i X^i$; donc, P admet, au moins r racines, et comme $\deg P < r$; alors $P = 0$; ainsi, pour tout $i \in \{0; \dots; r-1\}$; $\alpha_i = 0$. Donc la famille des colonnes de V est libre. On conclut que V est inversible.

II.A.6) Pour $i \in \{1; \dots; r\}$; on a $x_i \in V_x = \text{Vect}((f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r})$. Or $f^{j-1}(x) \in F$, puisque $x \in F$ et F est stable par f ; ainsi $x_i \in F$, alors $x_i \in F \cap E_i$; par suite $\sum_{i=1}^r x_i \in \bigoplus_{1 \leq i \leq r} (F \cap E_i)$ et donc

$x \in \bigoplus_{1 \leq i \leq r} (F \cap E_i)$, ceci pour tout $x \in F - \{0\}$; résultat qui est vraie aussi pour $x = 0$; donc

$F \subset \bigoplus_{1 \leq i \leq r} (F \cap E_i)$. Pour l'autre inclusion; il découle du fait que les $F \cap E_i$ sont des s-e-v de F . On en déduit que $F = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} (F \cap E_i)$.

II.B.1) Comme $p = n$; alors les valeurs propres de f sont simples; donc pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$; $\dim E_i = 1$

II.B.2) Soit $F = \text{Vect}(u)$, $u \neq 0$, une droite stable par f . Alors d'après I.A) ; u est un vecteur propre de f , donc $\exists i \in \{1; \dots; n\}$; $u \in E_i$; ainsi $F \subset E_i$ et comme ils ont même dimension alors $F = E_i$. Réciproquement; pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$; E_i est une droite stable par f ; de plus, pour $i \neq j$; on a $E_i \neq E_j$. On conclut qu'il existe exactement n droites stables par f , à savoir les E_i ; $i \in \{1; \dots; n\}$

II.B.3) Soit F un s-e-v stable par f tel que $\dim F = k \in \{2; \dots; n-1\}$. D'après II.A) : $F = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} F \cap E_i$

donc $\dim F = k = \sum_{i=1}^n \dim(F \cap E_i)$. Comme pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$, $\dim(F \cap E_i) \in \{0; 1\}$; alors il existe une partie I de $\{1; \dots; n\}$, à k éléments tels que $\forall i \in I; \dim(F \cap E_i) = 1$ et $\forall i \notin I; \dim(F \cap E_i) = 0$. Or pour $i \in I; \dim(F \cap E_i) = 1 = \dim E_i$ et $F \cap E_i \subset E_i$; donc $F \cap E_i = E_i$ et pour $i \notin I$; on a $F \cap E_i = \{0\}$; ainsi $F = \bigoplus_{i \in I} E_i$. Réciproquement; il est clair que si F est de cette forme; alors F est stable par f et $\dim F = k$. De plus; si I et I' sont des parties distincts de $\{1; \dots; n\}$ à k -éléments; alors $\bigoplus_{i \in I} E_i \neq \bigoplus_{i \in I'} E_i$; On conclut que le nombre de s-e-v F stables par f tels que $\dim F = k$ est égale au nombre de parties I à k éléments de $\{1; \dots; n\}$, à savoir C_n^k .

II.B.4) On remarque que le résultat établie à la question précédente reste valable pour tout entier k tel que $k \in \{0; \dots; n\}$; Ainsi le nombre des sous espaces stables est $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$. Ces sous espaces sont les $F_I = \bigoplus_{i \in I} E_i$ où I est une partie quelconque de $\{1; \dots; n\}$ avec la convention $\bigoplus_{i \in \emptyset} E_i = \{0\}$.

III-Troisième partie

III.A.1) Notons $\mathcal{B} = (1; X; \dots; X^n)$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

On a $D(1) = 0$ et $\forall k \in \{1; \dots; n\}; D(X^k) = kX^{k-1}$. Ainsi $\forall k \in \{0; \dots; n\}; D(X^k) \in \mathbb{K}_n[X]$. D étant linéaire; donc $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D ; et alors D induit un endomorphisme D_n sur $\mathbb{K}_n[X]$; et ce

$$\text{calcul montre que : } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(D_n) = A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & & 0 & & \vdots \\ & \ddots & & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & & & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & & \dots & \ddots & 0 & n \\ 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III.A.2) a) Notons $\dim F = q; F \neq \{0\}$

Posons $I = \{d^0 P; P \in F - \{0\}\}$; on a I est non vide car F est non nul (hypothèse) et $I \subset \mathbb{N}$.

Supposons que I est infinie. Alors; il existe $P_1; \dots; P_{q+1} \in F - \{0\}$ tels que $d^0 P_1 < \dots < d^0 P_{q+1}$.

$(P_1; \dots; P_{q+1})$ est une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts; donc elle est libre; et puisqu'elle est à $q + 1$ éléments, alors $q + 1 \leq \dim F = q$; ce qui est faux. On conclut donc que I est fini et par suite I admet un plus grand élément $n \in \mathbb{N}$; et alors, il existe $R \in F$ tel que $d^0 R = n$ et, tout élément P de F vérifie $d^0 P \leq n$, résultat qui montre que $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.

b) Puisque F est stable par D et $R \in F$; alors pour tout $i \in \{0; \dots; n\}; D^i(R) \in F$. Or pour tout $i \in \{1; \dots; n\}; n \geq d^0(D^{i-1}(R)) > d^0(D^i(R)) = d^0(R) - i = n - i \geq 0$. Ainsi $(D^i(R))_{0 \leq i \leq n}$ est une famille de polynômes non nuls de F de degrés deux à deux distincts; elle est donc libre de F .

c) De a) et b); on déduit que $\text{Vect}(D^i(R))_{0 \leq i \leq n} \subset F \subset \mathbb{K}_n[X]$. Or $\dim(\text{Vect}(D^i(R))_{0 \leq i \leq n}) = n + 1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$; Donc $\text{Vect}(D^i(R))_{0 \leq i \leq n} = \mathbb{K}_n[X]$. On conclut que $F = \mathbb{K}_n[X]$.

III.A.3) Soit F un s-e-v de E stable par D ; autre que $\{0\}$.

■ Si F est de dimension finie; on vient de voir qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F = \mathbb{K}_n[X]$. Réciproquement, un tel s-e-v est; d'après III.A1); stable par D .

■ Si F est de dimension infinie. Soit $P \in \mathbb{K}[X] - \{0\}$; posons $d^0 P = q$. On a $F \not\subset \mathbb{K}_q[X]$ (sinon; F sera de dimension finie ce qui n'est pas le cas) donc; il existe $R \in F$ tel que $n = d^0 R > q$. La démonstration faite en **III.A.2) b)** montre que $(D^i(R))_{0 \leq i \leq n}$ est une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}_n[X]$ de degrés deux à deux distincts; donc elle est libre; de plus son nombre d'éléments est égale à $n + 1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$; alors c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On a donc $\mathbb{K}_n[X] =$

$\text{Vect}(D^i(R))_{0 \leq i \leq n} \subset \text{car } R \in F \text{ et } F \text{ stable par } D$ F. Comme $d^0 P = q < n$; alors $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et par suite $P \in F$; ceci pour tout $P \in \mathbb{K}[X] - \{0\}$; résultat qui vaut aussi pour $P = 0$. On conclut que $F = \mathbb{K}[X]$ Réciproquement ; $\mathbb{K}[X]$ est un s-e-v stable par D .
En conclusion ; les s-e-v stables par D sont : $\{0\}$; $\mathbb{K}[X]$ et les $\mathbb{K}_n[X]$; $(n \in \mathbb{N})$.

III.B.1) Si la famille $\mathcal{B}_{f,u} = ((f^{n-i}(u))_{1 \leq i \leq n})$ est une base de E ; alors $f^{n-1}(u) \neq 0$. Réciproquement ; Soit u un vecteur de E tel que $f^{n-1}(u) \neq 0$. Supposons que la famille $\mathcal{B}_{f,u}$ est liée ; alors, il existe $\alpha_1; \dots; \alpha_n \in \mathbb{K}$; non tous nuls tels que : $\alpha_1 f^{n-1}(u) + \dots + \alpha_n u = 0$. (*)
Soit k le plus grand entier tel que $\alpha_k \neq 0$; alors $\alpha_i = 0$ pour tout $i > k$ et (*) s'écrit :
 $\alpha_1 f^{n-1}(u) + \dots + \alpha_k f^{n-k}(u) = 0$. Composons par f^{n+k-1} et utilisons le fait que $f^p = 0, \forall p \geq n$; on aura $\alpha_k f^{n-1}(u) = 0$ et alors $\alpha_k = 0$ ce qui est absurde. On conclut que la famille $\mathcal{B}_{f,u}$ est libre et puisque son nombre d'éléments est $n = \dim E$; alors c'est une base de E .
En conclusion ; les vecteurs u de E tels que $\mathcal{B}_{f,u}$ est une base de E sont ceux qui vérifient $f^{n-1}(u) \neq 0$. De tels vecteurs existent car $f^{n-1} \neq 0$.

III.B.2) On a : $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{f,u}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & \ddots & & & \\ 0 & & & & \dots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & & & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$

III.B.3) On a $\mathcal{B}_{f,u} = ((f^{n-i}(u))_{1 \leq i \leq n})$. Posons $e_i = (i-1)! f^{n-i}(u)$; $(1 \leq i \leq n)$ et $\mathcal{C} = (e_1; \dots; e_n)$

■ Il est clair que $\mathcal{C}$ est une base de E

■ Si $i = 1$; On a : $e_1 = (0)! f^{n-1}(u) = f^{n-1}(u)$; donc $f(e_1) = 0$

■ Si $2 \leq i \leq n$; On a :

$$f(e_i) = f((i-1)! f^{n-i}(u)) = (i-1)! f^{n+1-i}(u) = (i-1) \left((i-2)! f^{n-(i-1)}(u) \right) = (i-1)e_{i-1}$$

Ainsi : $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = A_{n-1}$.

III.B.4) Soit $\mathcal{C} = (e_1; \dots; e_n)$ la base introduite dans la question précédente et $\mathcal{B} = (1; X; \dots; X^{n-1})$

la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Soit φ l'isomorphisme : $\begin{cases} E \rightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \rightarrow \varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i X^{i-1} \end{cases}$

■ $\forall x \in E$; on a : $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(x) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(x))$ et donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(D(\varphi(x))) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(D) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(x)) = A_{n-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{C}}(x) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(f(x))).$$

Ainsi $D(\varphi(x)) = \varphi(f(x))$; (*).

Soit F un s-e-v de E stable par f , alors $\varphi(F)$ est un s-e-v de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$; de plus :

$D(\varphi(F)) \overset{(d'après (*))}{=} \varphi(f(F)) \overset{F \text{ est stable par } f}{\subset} \varphi(F)$, Ainsi $\varphi(F)$ est stable par D et alors, selon III.A.3) :

$$\varphi(F) = \{0\} \text{ ou } \varphi(F) = \mathbb{K}_p[X] = \text{Vect}(1; X; \dots; X^p) ; (0 \leq p \leq n-1)$$

Puisque $\varphi(e_i) = X^{i-1}$; alors, en appliquant φ^{-1} ; on obtient :

$$F = \{0\} \text{ ou } F = \text{Vect}(e_1; \dots; e_{p+1}) ; (0 \leq p \leq n-1)$$

Réciproquement; ces s-e-v sont stables par f car, $f(e_1) = 0$ et si $2 \leq i \leq n$; $f(e_i) = (i-1)e_{i-1}$.

Comme $e_i = (i-1)! f^{n-i}(u)$; on conclut que les s-e-v de E stables par f sont : $F_0 = \{0\}$ et les F_k ; $k \in \{1; \dots; n\}$ avec :

$$F_k = \text{Vect}(f^{n-1}(u); 1! f^{n-2}(u); \dots; (k-1)! f^{n-k}(u)) = \text{Vect}(f^{n-1}(u); f^{n-2}(u); \dots; f^{n-k}(u)).$$

Ces s-e-v sont évidemment deux à deux distincts ; leur nombre est donc $n+1$.

■ D'autre part ; on a :

$$F_0 = \{0\} = \text{Ker}(f^0) \text{ et } F_n = \text{Vect}(f^{n-1}(u); f^{n-2}(u); \dots; u) = E = \text{Ker}(f^n) ; (\text{car } f^n = 0)$$

Si $1 \leq k \leq n$; on a :

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i f^{n-i}(u) \in \text{Ker}(f^k) \Leftrightarrow f^k(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i f^{n+k-i}(u) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=k+1}^n \alpha_i f^{n+k-i}(u) = 0.$$

Pour $k + 1 \leq i \leq n$; on a $k \leq n + k - i \leq n - 1$ et comme la famille $(f^i(u))_{0 \leq i \leq n-1}$ est libre ; la dernière relation équivaut à $\alpha_i = 0$; $\forall i \in \{k + 1; \dots; n\}$; ainsi :

$$\text{Ker}(f^k) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i f^{n-i}(u) ; \alpha_i \in \mathbb{K} \right\} = \text{Vect}\left(f^{n-1}(u); f^{n-2}(u); \dots; f^{n-k}(u)\right) = F_k$$

IV-Quatrième partie

IV.A) f représente l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associé canoniquement à M et $\mathcal{B}_n$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_n}(f) = M$.

IV.B) Puisque M est à coefficients réels alors le polynôme caractéristique χ_f de f est à coefficients réels donc la fonction polynomiale $\chi_f: x \rightarrow \chi_f(x) = x^n + \dots + a_0$ de la variable réelle est une application continue de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et comme n est impair ; on a $\lim_{-\infty} \chi_f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \chi_f = +\infty$; donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaire ; χ_f admet une racine réel λ_0 qui est donc une valeur propre (réelle) de f .

IV.C.1) On a $X = \frac{1}{2}(Z + \bar{Z})$; $Y = \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z})$ avec $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$: alors :

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z_1 + \bar{z}_1 \\ z_2 + \bar{z}_2 \\ \vdots \\ z_n + \bar{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re}(z_1) \\ \text{Re}(z_2) \\ \vdots \\ \text{Re}(z_n) \end{pmatrix} ; \text{ De même } Y = \begin{pmatrix} \text{Im}(z_1) \\ \text{Im}(z_2) \\ \vdots \\ \text{Im}(z_n) \end{pmatrix}.$$

Ainsi : $X; Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E$

Soit $a; b \in \mathbb{R}$ tels que $aX + bY = 0$; on a donc $\frac{a}{2}(Z + \bar{Z}) + \frac{b}{2i}(Z - \bar{Z}) = 0$ ou encore

$$a'Z + b'\bar{Z} = 0 \quad (*) \quad \text{avec } a' = \frac{a}{2} + \frac{b}{2i} \quad \text{et } b' = \frac{a}{2} - \frac{b}{2i} \quad (**)$$

En multipliant (*) par M ; on aura $a'MZ + b'M\bar{Z} = 0$ et puisque M est à coefficients réels ; cela équivaut à : $a'MZ + b'\bar{M}\bar{Z} = 0$ ou encore à : $a'\lambda Z + b'\bar{\lambda}\bar{Z} = 0$ (***). En multipliant (*) par $\bar{\lambda}$ et en combinant avec (***) ; on aura : $a'(\lambda - \bar{\lambda})Z = 0$ et puisque $\lambda - \bar{\lambda} \neq 0$ (car λ complexe non réel) et $Z \neq 0$; alors $a' = 0$ et par (*) ; on aura $b' = 0$ et en tenant compte de (***) ; on aura $a = b = 0$. Ainsi la famille $(X; Y)$ est libre.

IV.C.2) On a $MZ = \lambda Z$; donc $M(X + iY) = (\alpha + i\beta)(X + iY)$ ou encore $MX + iMY = (\alpha X - \beta Y) + i(\beta X + \alpha Y)$ comme les matrices MX ; MY ; $\alpha X - \beta Y$ et $\beta X + \alpha Y$ sont des matrices à coefficients réels ; alors : $\begin{cases} MX = \alpha X - \beta Y = f(X) \\ MY = \beta X + \alpha Y = f(Y) \end{cases}$

Ainsi $f(X); f(Y) \in \text{Vect}(X; Y)$; comme $(X; Y)$ est libre ; on conclut que $F = \text{Vect}(X; Y)$ est un plan stable par f . De plus, on a : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(f_F) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

IV.D) l'affirmation : « tout endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$ -e-v E de dimension finie non nul admet au moins une droite ou un plan stable » est vraie. En effet :

Si f admet une valeur propre λ ; alors $F = \text{Vect}(e)$ où e est un vecteur propre de f associé à λ est une droite stable de E . Sinon ; Soit M la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E . On a $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et M n'admet pas de valeur propre réelle. M admet (au moins) une valeur propre complexe non réelle ; il existe donc, (d'après **IV.C.2**) ; $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que le s-e-v $\text{Vect}(X; Y)$ soit un plan stable par l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée canoniquement à M . Soit alors $x; y \in E$ tels que

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = X$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y) = Y$; Alors $F = \text{Vect}(x; y)$ est un plan stable par f .

IV.E) Soit $f: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ telle que $f(X) = XP$

On vérifie facilement que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Supposons qu'il existe une droite ou un plan F stable par f . Alors, il existe $P_0 \in F - \{0\}$. Puisque F est stable par f ; alors la famille $(P_0; \underbrace{XP_0}_{f(P_0)}; \underbrace{X^2P_0}_{f^2(P_0)})$ est une famille de polynômes non nuls d'éléments de F de degré deux à deux

distincts, donc elle est libre et par suite $\dim(F) \geq 3$; ce qui est faux, puisque $\dim(F) \leq 2$. Ainsi, On a un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ pour lequel il n'existe ni droite ni plan stable par f .

$$\text{IV.F)} A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{IV.F.1)} \text{ On a } \chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 4 & 0 \\ -1 & X+2 & 1 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)(X^2 + 2X + 5)$$

Le discriminant du trinôme $X^2 + 2X + 5$ est $\Delta = -16 < 0$. Ainsi A admet une seule valeur réelle $\lambda_0 = 1$ et deux valeurs propres complexes non réelles conjuguées $\lambda_1 = -1 + 2i = \overline{\lambda_2}$.

$$\blacksquare \text{ Soit } U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}); \text{ On a } U \in E_1(A) \Leftrightarrow (A - I_3)U = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4y = 0 \\ x - 3y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

Ainsi $E_1(A) = \text{Vect}(U) \stackrel{\text{notation}}{=} G$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. G est une droite stable par f .

$\blacksquare$ Pour $\lambda_1 = -1 + 2i$. Déterminons un vecteur $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ tel que $AZ = \lambda_1 Z$; on a :

$$AZ = \lambda_1 Z \Leftrightarrow \begin{cases} (2-2i)x - 4y = 0 \\ x - (1+2i)y - z = 0 \\ x + y + (1-2i)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (1+i)y \\ z = -iy \end{cases}; (y \in \mathbb{C})$$

On choisit $Z = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$ obtenu pour $y = 1$. Ainsi $Z = X + iY$; avec $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

D'après IV.C.2); $F = \text{Vect}(X; Y)$ est un plan stable par f .

On a : $\det_{\mathcal{B}_c}(X; Y; U) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$; donc $(X; Y; U)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ainsi

F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. De plus; en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et en tenant

compte (cf IV.C.2) de ce que $\begin{cases} f(X) = \alpha X - \beta Y \\ f(Y) = \beta X + \alpha Y \end{cases}$ avec ici $\alpha = -1$ et $\beta = 2$; car $\lambda_1 = -1 + 2i$;

on a : $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

IV.F.2) Soit : $(\mathcal{P}_U) \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = U \end{cases}; (U \in G)$

Posons, pour $t \in \mathbb{R}$; $X(t) = e^t U$. On a X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$X'(t) = e^t U \stackrel{\text{car } U \in E_1(A)}{=} e^t AU = A(e^t U) = AX(t)$; de plus $X(0) = e^0 U = U$. Ainsi; X est une

solution et c'est l'unique solution du problème $(\mathcal{P}_U)$, d'après le théorème de Cauchy-Lipchitz.

IV.F.3) On se donne $\sigma = (a; b) \in \mathbb{R}^2$ et on considère le problème de Cauchy :

$$\mathcal{C}_\sigma \begin{cases} x' = -x + 2y & (1) \\ y' = -2x - y & (2) \\ x(0) = a; y(0) = b & (3) \end{cases}$$

$\blacksquare$ On a $x'(0) = -x(0) + 2y(0) = -a + 2b$; $y'(0) = -2x(0) - y(0) = -2a - b$

■ D'après (1) et (2), toute solution $\phi = (x; y)$ est de classe C^2 (en fait de classe C^∞) et on a :

$$\begin{cases} x'' = -x' + 2y' \stackrel{(1) \text{ et } (2)}{=} -(-x + 2y) + 2(-2x - y) = -3x - 4y \stackrel{(1)}{=} -3x - 4\left(\frac{x' + x}{2}\right) = -2x' - 5x \\ y'' = -2x' - y' = -2(-x + 2y) - (-2x - y) = 4x - 3y = 4\left(\frac{-y' - y}{2}\right) - 3y = -2y' - 5y \end{cases}$$

Ainsi ; on a : $\begin{cases} x'' + 2x' + 5x = 0 \\ y'' + 2y' + 5y = 0 \end{cases}$; Donc x et y sont solutions d'une même équation différentielle

linéaire du second ordre à coefficients constants (E) : $f'' + 2f' + 5f = 0$

L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 + 2r + 5 = 0$.

$$\Delta' = 1 - 5 = -4 ; \text{ Ainsi : } r_1 = -1 + 2i = \overline{r_2} \text{ et alors : } \begin{cases} x(t) = e^{-t}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)) \\ y(t) = e^{-t}(k_1 \cos(2t) + k_2 \sin(2t)) \end{cases}$$

où $c_1; c_2; k_1$ et k_2 sont des constantes réels que l'on déterminera en calculant $x'(t)$ et $y'(t)$ et en tenant compte du fait que $x(0) = a$; $y(0) = b$; $x'(0) = -a + 2b$ et $y'(0) = -2a - b$; on

trouve $\begin{cases} x(t) = e^{-t}(a \cos(2t) + b \sin(2t)) \\ y(t) = e^{-t}(b \cos(2t) - a \sin(2t)) \end{cases}$; C'est l'unique solution du problème C_σ .

IV.F.4) Conservons les notations de la question IV.F.1) ; on a $A = PTP^{-1}$. Pour $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; posons $Y = P^{-1}X$. P étant constant ; Donc : $X' = AX \Leftrightarrow PY' = (PTP^{-1})PY \Leftrightarrow Y' = TY$ (*)

$$\text{Notons : } Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \text{ On a : } (*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -2x - y \\ z' = z \end{cases} (**)$$

$$\text{D'après IV.F.3) ; cela équivaut à ; } \exists a, b, c \in \mathbb{R} : \begin{cases} x(t) = e^{-t}(a \cos(2t) + b \sin(2t)) \\ y(t) = e^{-t}(b \cos(2t) - a \sin(2t)) \\ z(t) = c e^t \end{cases} (***)$$

$$\text{et donc : } X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_1} + y(t) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{V_2} + z(t) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_3} \quad (****)$$

P étant inversible, donc la famille $\mathcal{B} = (V_1; V_2; V_3)$ de ses vecteurs colonnes forme une base

de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et (****) montre que $\mathcal{M}_{at_{\mathcal{B}}}(X(t)) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. D'autre part ; x, y, z sont de classe C^∞

■ Soit X une solution du système différentiel $X' = AX$ telle que sa trajectoire est rectiligne ou plane ; alors $(X'(0); X''(0); X'''(0))$ est liée, donc $\det_{\mathcal{B}}(X'(0); X''(0); X'''(0)) = 0$

Or, par (***) ; on a : $x(0) = a$; $y(0) = b$; $z(0) = c$ et par (**), on a : $x'(0) = -a + 2b$; $y'(0) = -2a - b$; $z'(0) = c$. En dérivant deux fois le système (**) et en faisant $t=0$; on obtient :

$$\begin{cases} x''(0) = -x'(0) + 2y'(0) = -(-a + 2b) + 2(-2a - b) = -3a - 4b \\ y''(0) = -2x'(0) - y'(0) = -2(-a + 2b) - (-2a - b) = 4a - 3b \\ z''(0) = c \end{cases}$$

De même ; on trouve : $x'''(0) = 11a - 2b$; $y'''(0) = 2a + 11b$; $z'''(0) = c$.

$$\begin{aligned} \text{on a : } \det_{\mathcal{B}}(X'(0); X''(0); X'''(0)) &= \begin{vmatrix} -a + 2b & -3a - 4b & 11a - 2b \\ -2a - b & 4a - 3b & 2a + 11b \\ c & c & c \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \text{ puis } C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} \begin{vmatrix} -a + 2b & -2a - 6b & 14a + 2b \\ -2a - b & 6a - 2b & -2a + 14b \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = -80c(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Alors : $\det_{\mathcal{B}}(X'(0); X''(0); X'''(0)) = 0 \Leftrightarrow (c = 0) \text{ ou } (a = b = 0)$

$$\begin{aligned} \text{■ Si } c = 0 ; (****) \text{ s'écrit : } X(t) &= x(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= e^{-t}(a \cos(2t) + b \sin(2t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t}(b \cos(2t) - a \sin(2t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour $a, b \in \mathbb{R}$; X est une solution et on voit bien que sa trajectoire est contenue dans un plan dirigé par $u = (1; 1; 0)$ et $v = (1; 0; -1)$: Si $a = b = 0$; cette trajectoire est réduite au point $O = (0; 0; 0)$ et si $(a; b) \neq (0; 0)$; on vérifie que la famille $(X'(0); X'(\frac{\pi}{4}))$ est libre et donc cette trajectoire est plane.

■ Si $a = b = 0$; (****) s'écrit : $X(t) = c e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour $c \in \mathbb{R}$; X est une solution et on voit bien que sa trajectoire est contenue dans une droite dirigé par $w = (1; 0; 1)$: Si $c = 0$; cette trajectoire est réduite au point $O = (0; 0; 0)$ et si $c \neq 0$; cette trajectoire est rectiligne.

V-Cinquième partie

V.A.1) Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i$; ($\mathcal{B} = (\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n)$ base de E)

Analyse : Supposons qu'il existe un produit scalaire $\langle ; \rangle$ pour lequel $\mathcal{B} = (\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n)$ est une base orthonormée ; alors :

$$\langle x; y \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i; \sum_{j=1}^n y_j \varepsilon_j \rangle \stackrel{\text{bilinéarité}}{=} \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n x_i y_j \langle \varepsilon_i; \varepsilon_j \rangle) \stackrel{\mathcal{B} \text{ base orthonormée}}{=} \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Synthèse : posons ; $\langle x; y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. On vérifie alors qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sur E et que $\mathcal{B}$ en est une base orthonormée. L'unicité de ce produit scalaire découle de l'analyse.

V.A.2) Si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$; on a : $\langle x; y \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i = {}^t U V$

V.B) On a $H = \text{Vect}(u)$; posons pour $x \in E$; $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$

On a H est stable par $f \Leftrightarrow \forall x \in H$; $f(x) \in H \Leftrightarrow \forall x \in H$; $\langle f(x); u \rangle = 0$. Or $\langle f(x); u \rangle =$

${}^t (AX) U = {}^t X A U = \langle x; v \rangle$ où v est le vecteur de E tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = A U$. Donc : H est stable

par $f \Leftrightarrow \forall x \in H$; $\langle x; v \rangle = 0 \Leftrightarrow v \in H = \text{Vect}(u) \Leftrightarrow$ il existe un réel λ tel que $v = \lambda u$

ou encore tel que ${}^t A U = \lambda U \Leftrightarrow U$ est un vecteur propre de A .
($U \neq 0$ car $u \neq 0$)

V.C) On a $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B} = (\varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On considère alors le produit scalaire canonique pour lequel $\mathcal{B}$ est une base orthonormée.

D'après la question précédente ; pour déterminer les plans stables par f ; on détermine les

vecteurs propres de A . On a : $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \text{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$.

Après calcul ; on trouve $E_1(A) = \text{Vect}(U)$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On conclut que $H = (\text{Vect}(U))^L$

est l'unique plan stable par f . Une équation cartésienne de H dans $\mathcal{B}$ est : $x - y + z = 0$;

par suite $H = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

On voit que l'on retrouve le plan stable obtenu à la question IV.F.1).

V.D.1) On a f est diagonalisable ; donc E admet une base $\mathcal{B}' = (e_1; \dots; e_n)$ formée de vecteurs propres de f .

Si $n=1$; on a $H_1 = \{0\}$ qui est un hyperplan stable par f .

Si $n \geq 2$. Posons pour $j \in \{1; \dots; n\}$; $H_j = \text{Vect}(e_1; \dots; e_{j-1}; e_{j+1}; \dots; e_n)$

Il est clair que tous les H_j sont des hyperplans de E et sont deux à deux distincts donc leur nombre est n . De plus, ils sont stables par f car ils sont engendrés par des vecteurs propres de f .

Soit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$; on a :

$x \in H_1 \cap \dots \cap H_n \Leftrightarrow \forall j \in \{1; \dots; n\} ; x \in H_j \Leftrightarrow \forall j \in \{1; \dots; n\} ; \alpha_j = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ainsi : $H_1 \cap \dots \cap H_n = \{0\}$.

V.D.2) La réponse est oui ; en effet :

Supposons qu'il existe n -hyperplans $H_1; \dots; H_n$ de E , stables par f et tels que $H_1 \cap \dots \cap H_n = \{0\}$. Notons par $\langle ; \rangle$ l'unique produit scalaire qui fait de $\mathcal{B} = (\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n)$ une base orthonormée. On a :

$E = \{0\} = (H_1 \cap \dots \cap H_n) = \sum_{i=1}^n H_i^\perp$. Pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$; H_i est un hyperplan de E . Il

existe donc $u_i \in E - \{0\}$ tel que $H_i^\perp = \text{vect}(u_i)$; ainsi ; la relation précédente s'écrit

$E = \sum_{i=1}^n \text{vect}(u_i)$ et en notant $U_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i)$; on déduit que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \sum_{i=1}^n \text{vect}(U_i)$. Ainsi

$\mathcal{C} = (U_1; \dots; U_n)$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le nombre d'éléments est

$n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; alors c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Chaque H_{ii} étant stable par f ; donc,

d'après la question **V.B)** ; chaque U_i est un vecteur propre de A ; donc la base $\mathcal{C}$ est formée de

vecteurs propres de A : ainsi A est diagonalisable ; d'où A , et donc f est diagonalisable.