

**Corrigé de l'épreuve Mathématiques, Centrale II, 2025, filière PSI.
Version provisoire du 03/05/2025**

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.

Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

Attribution d'une valeur à des séries divergentes

Partie A - Deux approches pour une valeur à $1 + 2 + \dots + n + \dots$

I - Une première approche

Q1. On a $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$ et en faisant apparaître une série géométrique,

$$\forall x > 0, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n = \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

Q2. Comme quotient de fonctions de classe \mathcal{C}^1 dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$, la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 et

$$\forall x > 0, f'(x) = -\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}.$$

Q3. On a

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} &= \frac{1 - x + x^2/2 + o(x^2)}{(x - x^2/2 + x^3/6 + o(x^3))^2} \\ &= \frac{1 - x + x^2/2 + o(x^2)}{x^2(1 - x/2 + x^2/6 + o(x^2))^2}. \end{aligned}$$

Or, lorsque u tend vers 0, on a

$$\frac{1}{(1 - u)^2} = 1 + 2u + 3u^2 + o(u^2).$$

Donc,

$$\frac{1}{(1 - x/2 + x^2/6 + o(x^2))^2} = 1 + 2(x/2 - x^2/6) + 3x^2/4 + o(x^2) = 1 + x + \frac{5}{12}x^2 + o(x^2).$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} &= \frac{1}{x^2} (1 - x + x^2/2 + o(x^2)) (1 + x + 5x^2/12 + o(x^2)) \\ &= \frac{1}{x^2} (1 - x + x^2/2 + x - x^2 + 5x^2/12 + o(x^2)) \\ &= \frac{1}{x^2} (1 - x^2/12 + o(x^2)) \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{12} + o(1).$$

Q4. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n(x) = e^{-nx}$. Pour tout $a > 0$ et pour tout $x \geq a$,

$$0 \leq ne^{-nx} \leq ne^{-na} = o(1/n^2).$$

Les fonctions f_n sont de classe \mathcal{C}^1 et d'après ce qui précède, la série des dérivées $\sum f'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$. On peut donc appliquer le théorème de \mathcal{C}^1 dérivation des séries de fonctions et en déduire que

$$\forall x > 0, f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx}.$$

De là,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} - \frac{1}{x^2} = -f'(x) - \frac{1}{x^2} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{12} + o(1)$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} - \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{12}.$$

II - Une deuxième approche

II.1 - Une généralisation du théorème des sommes de Riemann pour les fonctions de classe \mathcal{C}^1

Q5. On a

$$a + nx \in]a, b] \Leftrightarrow 0 < nx \leq b - a \Leftrightarrow 0 < n \leq \frac{b-a}{x} \Leftrightarrow n \in \llbracket 1, \lfloor (b-a)/x \rrbracket$$

en convenant que $\llbracket 1, \lfloor (b-a)/x \rrbracket \rrbracket = \emptyset$ si $\lfloor (b-a)/x \rfloor = 0$, c'est-à-dire si $(b-a)/x < 1$.

Q6. On a

$$L/x - 1 \leq \lfloor L/x \rfloor \leq L/x$$

donc

$$-x \leq x \lfloor L/x \rfloor - L \leq 0$$

et enfin

$$\lfloor L - x \lfloor L/x \rfloor \rfloor \leq x.$$

Q7. En écrivant que pour tout n

$$\int_{a+(n-1)x}^{a+nx} f(a+nx) dt = xf(a+nx),$$

il vient

$$\begin{aligned} x \sum_{n=1}^{\lfloor (b-a)/x \rfloor} f(a+nx) &= \sum_{n=1}^{\lfloor (b-a)/x \rfloor} \int_{a+(n-1)x}^{a+nx} f(a+nx) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\lfloor (b-a)/x \rfloor} \int_{a+(n-1)x}^{a+nx} (f(a+nx) - f(t)) dt + \sum_{n=1}^{\lfloor (b-a)/x \rfloor} \int_{a+(n-1)x}^{a+nx} f(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\lfloor (b-a)/x \rfloor} \int_{a+(n-1)x}^{a+nx} (f(a+nx) - f(t)) dt + \int_a^{a+\lfloor (b-a)/x \rfloor x} f(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\lfloor (b-a)/x \rfloor} \int_{a+(n-1)x}^{a+nx} (f(a+nx) - f(t)) dt + \int_a^b f(t) dt - \int_{a+\lfloor (b-a)/x \rfloor x}^b f(t) dt. \end{aligned}$$

Et donc bien

$$x \sum_{n=1}^{\lfloor (b-a)/x \rfloor} f(a+nx) - \int_a^b f(t) dt = \sum_{n=1}^{\lfloor (b-a)/x \rfloor} \int_{a+(n-1)x}^{a+nx} (f(a+nx) - f(t)) dt - \int_{a+\lfloor (b-a)/x \rfloor x}^b f(t) dt.$$

Q8. On en déduit, par inégalité triangulaire et théorème des accroissements finis :

$$\begin{aligned}
 \left| x \sum_{n=1}^{\lfloor (b-a)/x \rfloor} f(a+nx) - \int_a^b f(t) dt \right| &\leq \sum_{n=1}^{\lfloor (b-a)/x \rfloor} \int_{a+(n-1)x}^{a+nx} |f(a+nx) - f(t)| dt + \int_{a+\lfloor (b-a)/x \rfloor x}^b |f(t)| dt \\
 &\leq \sup_{[a,b]} |f'| \sum_{n=1}^{\lfloor (b-a)/x \rfloor} \int_{a+(n-1)x}^{a+nx} (a+nx-t) dt + \sup_{[a,b]} |f| (b-a - \lfloor (b-a)/x \rfloor x) \\
 &= \sup_{[a,b]} |f'| \frac{x^2}{2} \lfloor (b-a)/x \rfloor + \sup_{[a,b]} |f| (b-a - \lfloor (b-a)/x \rfloor x) \\
 &\stackrel{\mathbf{Q6}}{\leq} \sup_{[a,b]} |f'| \frac{x}{2} (b-a) + \sup_{[a,b]} |f| x \\
 &= x \left(\frac{b-a}{2} \sup_{[a,b]} |f'| + \sup_{[a,b]} |f| \right).
 \end{aligned}$$

Notons que $\sup_{[a,b]} |f'|$ et $\sup_{[a,b]} |f|$ sont bien définis car f est de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[a, b]$.

Ainsi

$$0 \leq \left| x \sum_{n=1}^{\lfloor (b-a)/x \rfloor} f(a+nx) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq x \left(\frac{b-a}{2} \sup_{[a,b]} |f'| + \sup_{[a,b]} |f| \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

et par domination,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor (b-a)/x \rfloor} f(a+nx) = \int_a^b f(t) dt.$$

II.2 - Un développement asymptotique lorsque x tend vers 0 de $\sum_{n=1}^{+\infty} n\varphi(nx)$

Q9. On a de suite

$$\int_0^K \psi' = \psi(K) - \psi(0) = 0$$

et comme $\psi'(t) = \varphi(t) + t\varphi'(t)$ et comme φ est nulle sur $[K, +\infty[$,

$$\int_0^K \psi'' = \psi'(K) - \psi'(0) = -\varphi(0) = -1.$$

Q10. En appliquant **Q8** à ψ sur $[0, K]$, il vient

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} nx\varphi(nx) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} \psi(nx) = \int_0^K \psi(t) dt = \int_0^K t\varphi(t) dt.$$

En appliquant **Q8** à ψ' et à ψ'' sur $[0, K]$, il vient

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} \psi'(nx) = \int_0^K \psi'(t) dt = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} \psi''(nx) = \int_0^K \psi''(t) dt = -1.$$

Q11. En appliquant Taylor avec reste intégral à $\psi^{(l)}$ pour $n = k$ entre $b = t$ et $a = K$ et en tenant compte du fait que ψ et toutes ses dérivées sont nulles sur $[K, +\infty[$, on a de suite

$$\psi^{(l)}(t) = \int_K^t \frac{(t-s)^k}{k!} \psi^{(l+k+1)}(s) ds.$$

Q12. A l'aide de **Q11**, on a

$$\forall t \in [0, K], |\psi^{(l)}(t)| \leq \frac{1}{k!} \sup_{[0, K]} |\psi^{(l+k+1)}| \int_t^K (s-t)^k ds = \frac{(K-t)^{k+1}}{(k+1)!} \sup_{[0, K]} |\psi^{(l+k+1)}|.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \left| \int_{x \lfloor K/x \rfloor}^K \psi^{(l)}(t) dt \right| &\leq \frac{1}{(k+1)!} \sup_{[0, K]} |\psi^{(l+k+1)}| \int_{x \lfloor K/x \rfloor}^K (K-t)^{k+1} dt \\ &= \frac{1}{(k+2)!} \sup_{[0, K]} |\psi^{(l+k+1)}| (K-x \lfloor K/x \rfloor)^{k+2} \\ &\leq \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} \sup_{[0, K]} |\psi^{(l+k+1)}|. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$0 \leq \left| \frac{1}{x^k} \int_{x \lfloor K/x \rfloor}^K \psi^{(l)}(t) dt \right| \leq \frac{x^2}{(k+2)!} \sup_{[0, K]} |\psi^{(l+k+1)}| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

et enfin que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^k} \int_{x \lfloor K/x \rfloor}^K \psi^{(l)}(t) dt = 0}.$$

Q13. On a à l'aide de majorations qui deviennent un peu lassantes alors qu'il s'agit uniquement de la question 13...

$$\begin{aligned} |R_{k,l}(x)| &\leq \sup_{[0, K]} |\psi^{(k+l)}| \sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \left(\int_t^{nx} \frac{(s-t)^k}{k!} ds \right) dt \\ &= \sup_{[0, K]} |\psi^{(k+l)}| \sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \frac{(nx-t)^{k+1}}{(k+1)!} dt \\ &= \sup_{[0, K]} |\psi^{(k+l)}| \sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} \\ &= \sup_{[0, K]} |\psi^{(k+l)}| \lfloor K/x \rfloor \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} \\ &\leq \sup_{[0, K]} |\psi^{(k+l)}| \frac{Kx^{k+1}}{(k+2)!}. \end{aligned}$$

Et donc

$$\boxed{0 \leq \left| \frac{R_{k,l}(x)}{x^k} \right| \leq \sup_{[0, K]} |\psi^{(k+l)}| \frac{Kx}{(k+2)!} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}.$$

Q14. En appliquant Taylor avec reste intégral à $\psi^{(l)}$ pour $n = p$ entre $b = t$ et $a = nx$, on obtient

$$\psi^{(l)}(t) - \psi^{(l)}(nx) = \sum_{k=1}^p \frac{(t-nx)^k}{k!} \psi^{(k+l)}(nx) + \int_{nx}^t \frac{(t-s)^p}{p!} \psi^{(k+p+1)}(s) ds.$$

Il suffit ensuite d'intégrer par rapport à t entre $(n-1)x$ et nx , puis de sommer pour n variant de 1 à $\lfloor K/x \rfloor$ et enfin d'inverser les deux sommes finies pour obtenir l'identité demandée.

Q15. En appliquant ce qui précède pour $p = 2$ et $l = 0$, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (\psi(t) - \psi(nx)) dt &= \sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (t-nx) \psi'(nx) dt + \sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \frac{(t-nx)^2}{2} \psi''(nx) dt + R_{2,1}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} -\frac{x^2}{2} \psi'(nx) + \sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} \frac{x^3}{6} \psi''(nx) dt + R_{2,1}(x), \end{aligned}$$

d'où le résultat en divisant x^2 .

Q16. Immédiat en appliquant **Q7** sur $[0, K]$ à $f = \psi'$.

Q17. En appliquant **Q14** pour $p = 1$ et $l = 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (\psi'(t) - \psi'(nx)) dt = -\frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} \psi''(nx) + R_{1,2}(x).$$

En combinant avec **Q16**, il vient

$$x \sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} \psi'(nx) = \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} \psi''(nx) - R_{1,2}(x) - \int_{x\lfloor K/x \rfloor}^K \psi'(t) dt$$

et enfin

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} \psi'(nx) = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} \psi''(nx) - \frac{1}{x} R_{1,2}(x) - \frac{1}{x} \int_{x\lfloor K/x \rfloor}^K \psi'(t) dt.}$$

Q18. En passant à la limite dans **Q17** lorsque x tend vers 0 et en utilisant **Q10**, **Q12** et **Q13**, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} \psi'(nx) = -\frac{1}{2}.$$

En passant ensuite à la limite dans **Q15**, on obtient

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (\psi(t) - \psi(nx)) dt = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.}$$

Q19. Immédiat en appliquant cette fois **Q7** à $f = \psi$ sur $[0, K]$ et en divisant par x^2 .

Q20. En regroupant les résultats précédents, il vient

$$\sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} n\varphi(nx) = \frac{1}{x^2} \int_0^K \psi(t) dt - \frac{1}{12} + o(1).$$

Or, comme φ est nulle sur $[K, +\infty[$, on a $\varphi(nx) = 0$ pour $n > \lfloor K/x \rfloor$ et donc

$$\sum_{n=1}^{\lfloor K/x \rfloor} n\varphi(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\varphi(nx).$$

Finalement

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n\varphi(nx) = \frac{1}{x^2} \int_0^K \psi(t) dt - \frac{1}{12} + o(1),}$$

d'où le résultat avec $A = \int_0^K \psi(t) dt$.

Partie B - Les sommes infinies au sens de Ramanujan

I - La formule d'Euler-Maclaurin

Q21. On a $aB'_1 = B_0 = 1$ et donc $B_1 = X + c$ et la condition $\int_0^1 B_1(x) dx = 0$ donne $c = -\frac{1}{2}$. Ainsi

$$\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2}.}$$

De même, $B'_2 = 2B_1$ donc $B_2 = X^2 - X + c$ et $c = 1/6$ ce qui donne

$$\boxed{B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}.}$$

Q22. La définition des B_p montre qu'ils sont uniques : la relation $B'_p = pB_{p-1}$ fournit B_p à une constante additive près et la condition intégrale détermine la constante.

Il suffit donc de montrer que les polynômes C_p définis par $C_p = (-1)^p B_p(1 - X)$ vérifient :

$$C'_p = pC_{p-1} \text{ et } \int_0^1 C_p(x) dx = 0.$$

Or,

$$C'_p = (-1)^p (-1) B'_p(1 - X) = (-1)^{p+1} p B_{p-1}(1 - X) = (-1)^{p+1} p (-1)^{p-1} C_{p-1} = p C_{p-1}$$

et

$$\int_0^1 C_p(x) dx = (-1)^p \int_0^1 B_p(1 - x) dx \stackrel{u=1-x}{=} (-1)^p \int_1^0 B_p(u) (-du) = 0.$$

Ainsi, $C_p = B_p$ et donc $B_p(1 - X) = (-1)^p B_p$.

Q23. On a pour tout $p \geq 2$,

$$0 = p \int_0^1 B_{p-1}(x) dx = \int_0^1 B'_p(x) dx = B_p(1) - B_p(0)$$

et donc $B_p(1) = B_p(0) = b_p$.

A l'aide de **Q22**, il vient ensuite

$$\forall p \geq 3, b_p = B_p(0) = (-1)^p B_p(0) = (-1)^p b_p,$$

ce qui implique que pour tout p impair ≥ 3 , $b_p = -b_p$ et donc $b_p = 0$.

Q24. Par périodicité de \tilde{B}_p , la relation $(\tilde{B}_p)' = p\tilde{B}_{p-1}$ est vraie sur \mathbb{R} . On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \frac{f^{(p)}(t)}{p!} \tilde{B}_p(t) dt &= \lim_{x \rightarrow (k+1)^-} \int_k^x \frac{f^{(p)}(t)}{p!} \tilde{B}_p(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow (k+1)^-} \int_k^x \frac{f^{(p)}(t)}{(p+1)!} (p+1) \tilde{B}_p(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow (k+1)^-} \int_k^x \frac{f^{(p)}(t)}{(p+1)!} (\tilde{B}_{p+1})'(t) dt \\ &\stackrel{\text{l.P.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow (k+1)^-} \left[\frac{f^{(p)}(t)}{(p+1)!} \tilde{B}_{p+1}(t) \right]_k^x - \lim_{x \rightarrow (k+1)^-} \int_k^x \frac{f^{(p+1)}(t)}{(p+1)!} \tilde{B}_{p+1}(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow (k+1)^-} \frac{\tilde{B}_{p+1}(x) f^{(p+1)}(x) - \tilde{B}_{p+1}(k) f^{(p+1)}(k)}{(p+1)!} - \int_k^{k+1} \frac{f^{(p+1)}(t)}{(p+1)!} \tilde{B}_{p+1}(t) dt. \end{aligned}$$

Or, par 1-périodicité,

$$\lim_{x \rightarrow (k+1)^-} \frac{\tilde{B}_{p+1}(x) f^{(p+1)}(x) - \tilde{B}_{p+1}(k) f^{(p+1)}(k)}{(p+1)!} = \frac{B_{p+1}(1) f^{(p+1)}(k+1) - B_{p+1}(0) f^{(p+1)}(k)}{(p+1)!},$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{f^{(p)}(t)}{p!} \tilde{B}_p(t) dt = \frac{B_{p+1}(1) f^{(p+1)}(k+1) - B_{p+1}(0) f^{(p+1)}(k)}{(p+1)!} - \int_k^{k+1} \frac{f^{(p+1)}(t)}{(p+1)!} \tilde{B}_{p+1}(t) dt.}$$

Q25. En appliquant la formule précédente pour $p = 0$, il vient

$$\int_k^{k+1} f(t) dt = (1/2) f(k+1) + (1/2) f(k) - \int_k^{k+1} f'(t) \tilde{B}_1(t) dt$$

c'est-à-dire

$$\int_k^{k+1} f(t) dt = \frac{1}{2} (f(k+1) + f(k)) - \int_k^{k+1} f'(t) \tilde{B}_1(t) dt.$$

En sommant pour k variant entre 1 et $n-1$, il vient

$$\begin{aligned} \int_1^n f(t) dt &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \right) - \int_1^n f'(t) \tilde{B}_1(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(2 \sum_{k=1}^n f(k) - f(1) - f(n) \right) - r_{1,n}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\boxed{\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(t) dt + \frac{f(1) + f(n)}{2} + r_{1,n}.}$$

Q26. D'après **Q25**, il s'agit de montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, r_{1,n} = \sum_{l=1}^p \frac{b_{2l}}{(2l)!} \left(f^{(2l-1)}(n) - f^{(2l-1)}(1) \right) + r_{2p+1,n}.$$

Or, en sommant la relation obtenue en **Q24** pour k variant de 1 à $n-1$, on a

$$r_{p,n} = \frac{b_{p+1}}{(p+1)!} \sum_{k=1}^{n-1} \left(f^{(p)}(k+1) - f^{(p)}(k) \right) - r_{p+1,n} = \frac{b_{p+1}}{(p+1)!} \left(f^{(p)}(n) - f^{(p)}(1) \right) - r_{p+1,n}.$$

Ecrivons cette relation pour $p = 2l-1$ puis pour $p = 2l$. En tenant compte du fait que les b_p sont nuls pour p impair, il vient

$$r_{2l-1,n} = \frac{b_{2l}}{(2l)!} \left(f^{(2l-1)}(n) - f^{(2l-1)}(1) \right) - r_{2l,n}$$

et

$$r_{2l,n} = -r_{2l+1,n}.$$

De là,

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, r_{2l-1,n} - r_{2l+1,n} = \frac{b_{2l}}{(2l)!} \left(f^{(2l-1)}(n) - f^{(2l-1)}(1) \right).$$

En sommant finalement ces relations pour l variant de 1 à p , on obtient le résultat voulu par télescopage.

II - La constante de Ramanujan

Q27. Par périodicité de \tilde{B}_{2p+1} et le fait que B_{2p+1} est continue donc bornée en restriction à $[0, 1]$ (et donc à $[0, 1[$), on en déduit que

$$\frac{\tilde{B}_{2p+1}}{(2p+1)} f^{(2p+1)} = O(f^{(2p+1)}).$$

Comme $f^{(2p+1)}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ pour $p \geq q$, on en déduit que $\frac{\tilde{B}_{2p+1}}{(2p+1)} f^{(2p+1)}$ l'est aussi et

donc que C_p est bien définie pour $p \geq q$.

Pour $p' \geq p+1 \geq 1$, en utilisant **Q26**, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{l=1}^p \frac{b_{2l}}{(2l)!} \left(f^{(2l-1)}(n) - f^{(2l-1)}(1) \right) + r_{2p+1,n} = \sum_{l=1}^{p'} \frac{b_{2l}}{(2l)!} \left(f^{(2l-1)}(n) - f^{(2l-1)}(1) \right) + r_{2p'+1,n}$$

puis

$$r_{2p+1,n} = \sum_{l=p+1}^{p'} \frac{b_{2l}}{(2l)!} \left(f^{(2l-1)}(n) - f^{(2l-1)}(1) \right) + r_{2p'+1,n}.$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, il vient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\tilde{B}_{2p+1}}{(2p+1)} = - \sum_{l=p+1}^{p'} \frac{b_{2l}}{(2l)!} f^{(2l-1)}(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\tilde{B}_{2p'+1}}{(2p+1)} f^{(2p+1)},$$

ce qui signifie exactement que $C_p = C_{p'}$ et donc que C_p ne dépend pas de l'entier p .

Q28. Pour $f = 1$, on peut appliquer ce qui précède avec $p = 0$. On a alors

$$\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} 1 = C_0 = \frac{1}{2} - 1 - 0 + 0 = -\frac{1}{2}.$$

Pour $t \mapsto f(t) = t$, on peut appliquer ce qui précède avec $p = 1$. On a alors

$$\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} k = C_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{b_2}{2} = -\frac{1}{12}.$$

Pour $t \mapsto f(t) = t^2$, on peut aussi appliquer ce qui précède avec $p = 1$. On a alors

$$\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} k^2 = C_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{b_2}{2} \times 2 = 0.$$

Q29. Comme $q = 0$, on a

$$\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} f(k) = C_0 = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t) dt + \lim_{n \rightarrow +\infty} r_{1,n}.$$

Or, d'après **Q25**, on a

$$\frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t) dt + r_{1,n} = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t) dt + \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t) dt - \frac{f(1)}{2} - \frac{f(n)}{2} = \left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt \right) - \frac{f(n)}{2}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$, on en déduit que

$$\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} f(k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt \right).$$

Si de plus l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ est convergente, on en déduit que la série $\sum f(k)$ est convergente et que

$$\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} f(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) - \int_0^{+\infty} f.$$

Partie C - Développements tayloriens généralisés

I - Les formules de Taylor généralisées

Q30. Par récurrence, on a

$$P_n(t) = n \int_0^t P_{n-1} + c_n,$$

ce qui montre que P_n est un polynôme défini à la constante c_n près. Mais la condition $\varphi(P_n) = 0$ et la condition $\varphi(\mathbf{1}) = 1$ impliquent que $c_n = -n\varphi(Q_{n-1})$ où Q_{n-1} est le polynôme défini par

$$\forall t \in \mathbb{R}, Q_{n-1}(t) = \int_0^t P_{n-1}.$$

On a bien montré que la suite (P_n) est une suite de polynômes, uniquement définie.

Q31. Soit C tel que pour tout P ,

$$|\varphi(P)| \leq C\|P\|_\infty.$$

A l'aide de **Q30**, on a

$$P_{n+1}(t) = (n+1) \int_0^t P_n(s) ds - (n+1)\varphi(Q_n) = (n+1)Q_n(t) - (n+1)\varphi(Q_n).$$

Or pour tout $t \in [0, 1]$, on a par positivité de l'intégrale

$$|Q_n(t)| = \left| \int_0^t P_n(s) ds \right| \leq \|P_n\|_\infty$$

donc $\|Q_n\|_\infty \leq \|P_n\|_\infty$ et

$$|\varphi(Q_n)| \leq C\|Q_n\|_\infty \leq C\|P_n\|_\infty.$$

On en déduit que

$$|P_{n+1}(t)| \leq (n+1)(\|P_n\|_\infty + C\|P_n\|_\infty)$$

et par passage au sup en t :

$$\boxed{\|P_{n+1}\|_\infty \leq (n+1)(1+C)\|P_n\|_\infty}.$$

Q32. Par récurrence, on déduit de **Q32** que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|P_n\|_\infty \leq n!(1+C)^n \|P_0\|_\infty = n!(1+C)^n.$$

On en déduit que

$$\forall x \in [0, 1], \forall t \in \mathbb{R}, \left| \frac{P_k(x)}{k!} t^k \right| \leq (1+C)^k |t|^k.$$

On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } t \in \left] -\frac{1}{1+C}, \frac{1}{1+C} \right]}$ et pour tout $x \in [0, 1]$, la série $\sum \frac{P_k(x)}{k!} t^k$ est absolument convergente, donc convergente, et donc finalement que $\boxed{S(x, t) \text{ existe}}$.

Q33. Pour $t \in \left] -\frac{1}{1+C}, \frac{1}{1+C} \right[$ fixé, on a

$$\forall k \geq 1, \forall x \in [0, 1], \left| \frac{P'_k(x)}{k!} t^k \right| = \left| \frac{P'_{k-1}(x)}{(k-1)!} t^k \right| \leq (1+C)^{k-1} t^k$$

donc

$$\sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{P'_k(x)}{k!} t^k \right| \leq (1+C)^{k-1} t^k.$$

Il y a donc convergence normale de la série des dérivées, ce qui montre d'après le théorème de \mathcal{C}^1 dérivation des séries de fonctions que $x \mapsto S(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, de dérivée égale à

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{P'_{k-1}(x)}{(k-1)!} t^k = tS(x, t).$$

Q34. D'après ce qui précède, on reconnaît une EDL 1 à coefficients constants vis à vis de x . Il existe donc une constante $\alpha(t)$ telle que

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], S(x, t) = \alpha(t)e^{tx}}.$$

Q35. Grâce aux estimations précédentes, la suite de fonctions

$$\left(x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)}{k!} t^k \right)_{n \geq 0}$$

converge uniformément, c'est-à-dire dans E , vers $x \mapsto S(x, t)$. Par continuité puis linéarité de φ , on en déduit que

$$\begin{aligned}\varphi(x \mapsto S(x, t)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi \left(x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)}{k!} t^k \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \varphi(P_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(P_0) \\ &= 1.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\alpha(t) = \frac{1}{\varphi(x \mapsto e^{tx})}}.$$

Q36. L'existence et l'unicité des B_n a déjà été montrée (deux fois !) dans les questions précédentes. Pour le reste, il s'agit d'appliquer les résultats précédents avec

$$\varphi : P \mapsto \int_0^1 P.$$

On peut alors choisir $C = 1$ et on a donc :

$$\forall x \in [0, 1], \forall t \in]-1/2, 1/2[, \alpha(t)e^{xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n$$

avec

$$\alpha(t) = \frac{1}{\int_0^1 e^{tx} dx} = \frac{t}{e^t - 1} \text{ si } t \neq 0 \text{ et } \alpha(0) = 1.$$

On donc bien

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \forall t \in]-1/2, 1/2[, \frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n.}$$

Q37. On raisonne par récurrence sur p .

Initialisation. Pour $p = 0$, la formule s'écrit

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t) dt$$

et est donc vraie.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons la formule vraie au rang p et montrons la au rang $p + 1$.

On a par intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt &= \int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \\ &= \int_y^x \frac{-P'_{p+1}(x+y-t)}{(p+1)!} f^{(p+1)}(t) dt \\ &= \left[\frac{-P_{p+1}(x+y-t)}{(p+1)!} f^{(p+1)}(t) \right]_y^x + \int_y^x \frac{P_{p+1}(x+y-t)}{(p+1)!} f^{(p+2)}(t) dt \\ &= \frac{P_{p+1}(x)}{(p+1)!} f^{(p+1)}(y) - \frac{P_{p+1}(y)}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x) + \int_y^x \frac{P_{p+1}(x+y-t)}{(p+1)!} f^{(p+2)}(t) dt.\end{aligned}$$

Le résultat en découle en partant de l'hérédité, c'est-à-dire de la formule au rang p .

Q38. Immédiat en appliquant φ à l'identité précédente, vue comme identité entre fonctions de la variable y .

Q38. On a pour tout g , $|g(0)| \leq \|g\|_\infty$, ce qui montre la continuité de l'application linéaire $g \mapsto g(0)$ sur E .

On en déduit alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{P_k(x)}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{P_p(x-t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt.$$

Or, pour $\varphi : g \mapsto g(0)$, la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ n'est rien d'autre que la suite $(X^n)_{n \geq 0}$ si bien que l'on retrouve la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt$$

entre $b = x$ et $a = 0$.

Q40. En appliquant **Q37** à la fonction $x \mapsto f(x+j)$, on a

$$f(x+j) = \sum_{k=0}^p \frac{P_k(x)}{k!} \varphi \left(y \mapsto f^{(k)}(y+j) \right) + \varphi \left(y \mapsto \int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t+j) dt \right).$$

En l'appliquant en $x = 0$:

$$f(x+j) = \sum_{k=0}^p \frac{P_k(0)}{k!} \varphi \left(y \mapsto f^{(k)}(y+j) \right) + \varphi \left(y \mapsto \int_y^0 \frac{P_p(y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t+j) dt \right).$$

Or,

$$\int_y^0 \frac{P_p(y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t+j) dt \underset{u=t+j}{=} \int_{y+j}^j \frac{P_p(y-u+j)}{p!} f^{(p+1)}(u) du = - \int_j^{y+j} \frac{P_p(y-u+j)}{p!} f^{(p+1)}(u) du,$$

ce qui conclut.

II - Formule d'Euler-Boole

Q41. C'est exactement le même raisonnement qu'en **Q36** avec $\varphi : g \mapsto \frac{1}{2}(g(0) + g(1))$. La constante $C = 1$ convient à nouveau, seul change le calcul de $\alpha(t)$. On a

$$\alpha(t) = \frac{1}{\frac{1}{2}(e^0 + e^t)} = \frac{2}{e^t + 1}.$$

On a donc

$$\forall x \in [0, 1], \forall t \in]-1/2, 1/2[, \frac{2e^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_n(x)}{n!} t^n.$$

Q42. Changeons x en $1-x$ et t en $-t$. Il vient

$$\forall x \in [0, 1], \forall t \in]-1/2, 1/2[, \frac{2e^{-(1-x)t}}{e^{-t} + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_n(1-x)}{n!} (-1)^n t^n.$$

Or,

$$\frac{e^{-(1-x)t}}{e^{-t} + 1} = \frac{e^{-t}(e^{xt})}{e^{-t}(1 + e^t)} = \frac{e^{xt}}{e^t + 1}.$$

On en déduit que

$$\forall x \in [0, 1], \forall t \in]-1/2, 1/2[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_n(1-x)}{n!} (-1)^n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_n(x)}{n!} t^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, il vient

$$\forall n \geq 0, \forall x \in [0, 1], E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x).$$

Le polynôme $E_n(1 - X) - (-1)^n E_n(X)$ s'annule sur $[0, 1]$, il a donc une infinité de racines donc est le polynôme nul :

$$\boxed{\forall n \geq 0, E_n(1 - X) = (-1)^n E_n(X)}.$$

Q43. *A ce stade de ce sujet aussi pénible qu'inadapté, je me permets d'être négligent.*

"Immédiat" en appliquant **Q40** et **Q42** avec $\varphi : g \mapsto \frac{1}{2}(g(0) + g(1))$.

Q44. "Immédiat" en multipliant par $(-1)^j$ l'identité précédente et en sommant pour j variant de 1 à n .

Et bien alors, le concepteur aurait-il eu un coup de mou ? A ce point d'inadaptation, on aurait pu rajouter 3 questions du type (27), (28) et (29) et déterminer une constante de Ramanujan pour les sommes

alternées $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k f(k)$ et peut-être même battre le record du nombre de questions non traitées par le moindre candidat ??